

《数值代数》习题03

1. 证明：求解复矩阵和复向量的线性方程组可归结为求解实向量和实矩阵的线性方程组。是否亦可同样把计算复矩阵的特征值问题归结为计算实矩阵的特征值问题？

2. 考察线性方程组 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ 1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2(1 + 10^{-10}) \\ -10^{-10} \\ 10^{-10} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(1) 验证 $x = (10^{-10}, -1, 1)^T$ 是方程组的解，并验证系数矩阵的条件数满足 $\kappa_{\infty}(A) = 2(10^{10} + 1) \approx 2 \times 10^{10}$ 。

(2) 证明：若 $|E| < 10^{-8}|A|$ ，且 $(A + E)y = b$ ，则有 $|x - y| < 10^{-7}|x|$ 。本例表明，即使 A 的条件数很大，对 A 各元素的微小相对扰动也未必引起 x 的较大相对变化。

3. 设 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，而且 $\|B\|_2 < 1$ 。证明：若定义

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I \end{bmatrix}, \quad (2)$$

则有

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2}. \quad (3)$$

4. 设 A 非奇异， $Ax = b \neq 0$ 。使用同一个向量范数及其诱导矩阵范数，记

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad \varepsilon_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \varepsilon_b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad \eta = \kappa(A) \varepsilon_A < 1. \quad (4)$$

考虑扰动后的方程组

$$(A + \Delta A)y = b + \Delta b. \quad (5)$$

(1) 利用 Neumann 级数证明 $A + \Delta A$ 非奇异，并证明

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \eta}. \quad (6)$$

(2) 证明一般的联合扰动界

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)(\varepsilon_A + \varepsilon_b)}{1 - \kappa(A)\varepsilon_A}. \quad (7)$$

(3) 若 $\varepsilon_A, \varepsilon_b \leq \varepsilon$ ，且 $\delta = \varepsilon \kappa(A) < 1$ ，证明

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\delta}{1 - \delta}, \quad \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta}. \quad (8)$$

5. 设 $v \neq 0$ 。证明

$$I - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^H}{\mathbf{v}^H\mathbf{v}} \quad (9)$$

是正交投影矩阵，它沿 $\text{span}\{\mathbf{v}\}$ 将 $\mathbb{C}^m$ 投影到超平面 $\text{span}\{\mathbf{v}\}^\perp$ 。

6. 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

求若干个 Householder 反射的乘积 H ，使得 $HA = U$ ，其中 U 为上三角矩阵。

7. 证明：对向量组 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 的 Gram-Schmidt 正交化过程能完成，当且仅当这些向量线性无关。

8. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称。在精确算术下，已构造标准正交向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ ，并且对 $1 \leq i < j$ 有

$$A\mathbf{v}_i = \beta_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{v}_i + \beta_i\mathbf{v}_{i+1}, \quad \mathbf{v}_0 = 0, \quad \beta_0 = 0. \quad (11)$$

(1) 证明 $\mathbf{v}_i^T A\mathbf{v}_j = 0$ ($i \leq j-2$)，再证明向量

$$\mathbf{w}_j = A\mathbf{v}_j - \alpha_j\mathbf{v}_j - \beta_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}, \quad \alpha_j = \mathbf{v}_j^T A\mathbf{v}_j, \quad (12)$$

与所有已构造的基向量正交。 $j=1$ 时略去含 $\mathbf{v}_{j-1}$ 的项。

(2) 当 $\mathbf{w}_j \neq 0$ 时，取 $\beta_j = \|\mathbf{w}_j\|_2$ 、 $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}_j/\beta_j$ 。令 $V_j = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j]$ ，写出 $T_j = V_j^T A V_j$ 的非零元，并证明

$$A V_j = V_j T_j + \beta_j \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{e}_j^T. \quad (13)$$

9. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称，精确算术下的 Lanczos 分解为

$$A V_m = V_m T_m + \beta_m \mathbf{v}_{m+1} \mathbf{e}_m^T, \quad V_{m+1}^T V_{m+1} = I_{m+1}, \quad \beta_m > 0. \quad (14)$$

其中 $V_{m+1} = [V_m, \mathbf{v}_{m+1}]$ 。设 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 、 $T_m \mathbf{y} = \theta \mathbf{y}$ 、 $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$ ，令 $\mathbf{x} = V_m \mathbf{y}$ 。称 $(\theta, \mathbf{x})$ 为由投影矩阵得到的 Ritz 近似特征对，并记 $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \theta \mathbf{x}$ 。

(1) 证明

$$\|\mathbf{x}\|_2 = 1, \quad \|\mathbf{r}\|_2 = \beta_m |\mathbf{e}_m^T \mathbf{y}|, \quad V_m^T \mathbf{r} = 0. \quad (15)$$

(2) 证明 $\min_{\lambda \in \lambda(A)} |\theta - \lambda| \leq \|\mathbf{r}\|_2$ 。

(3) 构造实对称矩阵 E ，使 $(A + E)\mathbf{x} = \theta \mathbf{x}$ 且 $\|E\|_2 = \|\mathbf{r}\|_2$ ，并证明，在所有满足该特征方程的实对称扰动中，所构造矩阵的二范数最小。