

## 《数值代数》习题02

1. 设  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = B + iC$ 。

(1) 若  $A$  是 Hermite 矩阵, 证明

$$M = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \quad (1)$$

是实对称矩阵。说明矩阵  $A$  与  $M$  之间特征值和特征向量的关系, 并指出这一关系可能的应用。

(2) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是 Hermite 矩阵, 证明  $\rho(A) = \|A\|_2$ 。举例说明若  $A$  不是 Hermite 矩阵, 则上述等式不一定成立。写出矩阵谱半径与范数之间的关系。

2. 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  的特征值, 令

$$M = \frac{A + A^H}{2}, \quad N = \frac{A - A^H}{2}. \quad (2)$$

证明

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2, \quad \sum_{i=1}^m |\operatorname{Re} \lambda_i|^2 \leq \|M\|_F^2, \quad \sum_{i=1}^m |\operatorname{Im} \lambda_i|^2 \leq \|N\|_F^2. \quad (3)$$

3. 对  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  定义

$$\|A\|_* = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \|X\|_2 \leq 1}} \operatorname{tr}(A^T X). \quad (5)$$

若  $r = \operatorname{rank}(A)$ , 证明

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(A), \quad (6)$$

其中  $\sigma_i(A)$  为非零奇异值。

4. 设  $A = (a_{ij}) = [\xi_1, \dots, \xi_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其中  $\xi_j$  表示  $A$  的第  $j$  列。证明:

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|\xi_j\|_2. \quad (7)$$

5. 设  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$  均为  $k$  维子空间,  $1 \leq k < n$ 。取正交矩阵  $W = [W_1, W_2]$ 、 $Z = [Z_1, Z_2]$ , 其中  $W_1, Z_1$  的  $k$  列分别张成  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ 。定义

$$d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \|W_1 W_1^T - Z_1 Z_1^T\|_2. \quad (9)$$

主角  $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_k \leq \pi/2$  定义为  $\cos \theta_i = \sigma_i(W_1^T Z_1)$ , 其中奇异值递减排列。

(1) 对  $Q = W^T Z$  作相应分块。利用  $Q^T Q = Q Q^T = I$  证明

$$\|W_2^T Z_1\|_2^2 = \|W_1^T Z_2\|_2^2 = 1 - \sigma_{\min}(W_1^T Z_1)^2. \quad (10)$$

(2) 证明  $d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \|W_2^T Z_1\|_2$ 。可使用主角分解，也可考察两个正交投影之差的平方。

(3) 当  $\mathcal{S}_1 = \text{span}\{(1, 0)^T\}$ 、 $\mathcal{S}_2 = \text{span}\{(\cos \theta, \sin \theta)^T\}$ ， $0 \leq \theta \leq \pi/2$  时，直接计算并解释距离。再用维数不同的两个子空间说明前两问为何明确要求等维。

6. 分别证明下列结论。

(1) 设

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中  $1 \leq k < n$ ， $R_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 、 $R_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ 、 $R_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ 。证明：

$$\sigma_{k+1}(R) \leq \|R_{22}\|_2, \quad (12)$$

其中  $\sigma_{k+1}(R)$  为  $R$  的第  $k+1$  个奇异值。

(2) 设  $A, B$  有相同的行数，且  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ，设  $P_A$  和  $P_B$  分别是到像空间  $\text{range}(A)$  和  $\text{range}(B)$  上的正交投影算子。证明：

$$\|P_A(I - P_B)\|_2 = \|P_B(I - P_A)\|_2 = \|P_B - P_A\|_2. \quad (13)$$

7. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 、 $\varepsilon \geq 0$ ，定义

$$r_\varepsilon(A) = \min\{\text{rank}(B) : \|A - B\|_2 \leq \varepsilon\}. \quad (14)$$

证明  $r_\varepsilon(A)$  等于  $A$  的奇异值中严格大于  $\varepsilon$  的个数。

8. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

(1) 求  $A$  的奇异值分解。

(2) 求二范数意义下距  $A$  最近的秩一矩阵  $B$ 。

9. 设矩阵  $A, B$  是  $n$  阶 Hermite 正定矩阵，证明

$$\kappa(A + B) \leq \max\{\kappa(A), \kappa(B)\}, \quad (16)$$

$$\max\left\{\frac{\kappa(A)}{\kappa(B)}, \frac{\kappa(B)}{\kappa(A)}\right\} \leq \kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B), \quad (17)$$

其中  $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  为谱条件数。

10. 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是 Hermite 矩阵，特征值为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。又设  $U_m \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ， $U_m^H U_m = I_m$ ，其中  $I_m$  为  $m$  阶单位矩阵。证明

$$\lambda_{n-m+1} + \dots + \lambda_n = \min_{U_m} \text{tr}(U_m^H A U_m), \quad (18)$$

其中  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 。