

《数值代数》习题01

1. 假设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

求 $\text{trace}(A)$ 、 $\det(A)$ 和谱半径 $\rho(A)$ 。

2. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其 Gershgorin 闭圆盘为

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

(1) 若这些圆盘两两不相交, 证明每个圆盘恰含一个特征值 (按代数重数计数)。

(2) 若其中两个圆盘仅在一点相切, 且它们的并集与其余圆盘不相交, 说明这两个圆盘的并集含有几个特征值 (按代数重数计数), 并解释为何不能对每个圆盘分别沿用 (1) 的结论。

3. 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 按行严格对角占优, 证明:

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right). \quad (4)$$

4. 设 A 与 $A + \Delta A$ 均为可逆矩阵。

(1) 证明 $I + A^{-1}\Delta A$ 可逆。

(2) 证明

$$(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}\Delta A(A + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}. \quad (5)$$

5. 设 u, v 为 m 维向量, $A = I + uv^H$ 。若 A 非奇异, 证明其逆可写为 $A^{-1} = I + \alpha uv^H$, 并求标量 α 的表达式。确定 A 奇异的充要条件; 在奇异时求 $\text{null}(A)$ 。

6. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上的向量范数, 对偶范数定义为

$$\|x\|' = \sup_{\|y\|=1} |y^H x|. \quad (6)$$

(1) 证明 $\|\cdot\|'$ 是范数。

(2) 设 $x, y \in \mathbb{C}^m$, 且 $\|x\| = \|y\| = 1$ 。证明存在秩一矩阵 $B = yz^H$, 使得 $Bx = y$, 且其诱导矩阵范数满足 $\|B\| = 1$ 。可使用如下引理: 对任意 $x \in \mathbb{C}^m$, 存在非零 $z \in \mathbb{C}^m$, 使 $|z^H x| = \|z\|' \|x\|$ 。

7. 对 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 定义从向量一范数到无穷范数的诱导矩阵范数 $\|A\|_{\infty, 1} = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_{\infty} / \|x\|_1$ 。证明

$$\|A\|_{\infty, 1} = \max_{i,j} |a_{ij}|. \quad (7)$$

8. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, 证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}. \quad (8)$$

9. 设 $\|\cdot\|$ 为一个给定的诱导矩阵范数, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 且 $\|A\| < 1$ 。证明 $I - A$ 非奇异, 并证明

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (9)$$

10. 设 $Ax = \lambda x$ 、 $\|x\|_2 = 1$, 且酉矩阵 P 满足 $Px = e_1$ 。证明存在矩阵 A_2 使

$$PAP^H = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$