Gabor 框架和小波框架

1 Gabor 框架

令

$$g_{n,k}(t) = g(t - nu_0)\exp(ik\xi_0 t)$$

那么，人们关心在什么条件下 $\{g_{n,k}\}_{(n,k)\in Z^2}$ 是一个框架。下面定理给出了必要条件。

定理 1 $\{g_{n,k}\}_{(n,k)\in Z^2}$ 是一个框架的必要条件是

$$\frac{2\pi}{u_0\xi_0} \geq 1.$$

框架界 A, B 必须满足：

$$\begin{aligned}
& A \leq \frac{2\pi}{u_0\xi_0} \leq B \\
\forall t \in R, \qquad & A \leq \frac{2\pi}{\xi_0}\sum_n |g(t - nu_0)|^2 \leq B \\
\forall \omega \in R, \qquad & A \leq \frac{1}{u_0}\sum_k |\hat{g}(\omega - k\xi_0)|^2 \leq B.
\end{aligned}$$

倘若我们要求 $g_{n,k}$ 组成一个正交基，那么 $u_0\xi_0 = 2\pi$. 下面定理给出了一个必要条件。

定理 2 *(Balian-Low)* 如果 $\{g_{n,k}\}_{(n,k)\in Z^2}$ 是一个 *Gabor* 框架，且 $u_0\xi_0 = 2\pi$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|g(t)|^2 dt = \infty \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \infty.$$

2 Gabor 框架的对偶框架

下面的定理显示 Gabor 框架的对偶框架仍是一个 Gabor 框架：

定理 3 框架 $\{g_{n,k}\}_{(n,k)\in Z^2}$ 的对偶框架能写作如下形式：

$$\tilde{g}_{n,k}(t) = \tilde{g}(t - nu_0)\exp(ik\xi_0 t), \tag{1}$$

此处

$$\tilde{g} = (U^*U)^{-1}g.$$

3 特殊函数

令

$$g(t) := \pi^{-1/4} \exp(-t^2/2).$$

那么，当 $\{g_{n,k}\}$ 是一个框架，如果和仅仅如果 $2\pi \geq u_0\xi_0$.

4 紧框架

定理 4 令 g 是一个支集在 $[-\pi/\xi_0, \pi/\xi_0]$ 的函数。如果

$$\forall t \in R, \quad \frac{2\pi}{\xi_0} \sum_n |g(t - nu_0)|^2 = A.$$

那么，$\{g_{n,k}\}$ 是个紧框架，且框架界为 A.

在 Gabor 框架里，最令人感兴趣的猜想为线性独立猜想：

猜想 1 如果 $g \in L^2(R)$ 且 $(\alpha_k, \beta_k), k = 1, \ldots, N$ 是 R^2 中任意 N 个不同的点，那么

$$\{\exp(i\alpha_k t) g(t - \beta_k)\}_{k=1}^N$$

线性独立。

当前最好的结果为如下论文中得到的：

P.A. Linnell, Von Neumann algebras and linear independence of translates, Proc. AMS 127 (1999), 3269-3277.

5 小波框架

令

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi(\frac{t - nu_0 a^j}{a^j}).$$

那么在什么条件下 $\psi_{j,n}$ 形成一个框架呢？令

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty.$$

定理 5 如果 $\{\psi_{j,n}\}$ 是 L^2 的一个框架，那么

$$A \leq \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} \leq B$$

$$\forall \omega \in R \setminus \{0\}, \qquad A \le \frac{1}{u_0} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \le B.$$

定理 6 令

$$\beta(\xi) = \sup_{1 \le |\omega| \le a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)| |\hat{\psi}(a^j \omega + \xi)|$$

$$\Delta = \sum_{k \ne 0} (\beta(2\pi k/u_0) \beta(-2\pi k/u_0))^{1/2}.$$

如果 u_0, a 使得

$$A_0 = \frac{1}{u_0} (\inf_{1 \le |\omega| \le a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 - \Delta) > 0$$

$$B_0 = \frac{1}{u_0} (\sup_{1 \le |\omega| \le a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 + \Delta) < \infty$$

那么 $\psi_{j,n}$ 是一个 $L^2(R)$ 的框架，且框架界为 A_0, B_0.