Frame 理论

1 定义

假设 f 是一个频率有限的函数，且频率范围为 $[-\pi/T,\pi/T]$ ，那么

$$f(t_n)=\frac{1}{T}\left\langle f(t),h_T(t-t_n)\right\rangle,\qquad h_T(t)=\operatorname{sinc}(\pi t/T).$$

那么，当 $t_n=nT$ 时候，根据采样定理，我们可以重建 f 通过 $f(t_n)$ 。那么，当 t_n 为任意序列时，我们如何重建 f 呢？或者在什么条件下我们能重建 f 呢？

假定 $\mathbf{H}$ 是一个 Hilbert 空间， f 是 $\mathbf{H}$ 中的一个元素。那么，人们关心如下的问题：在什么条件下，人们能通过 $\langle f,\phi_n\rangle_{n\in\Gamma}$ 恢复 f? 这里 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 是 $\mathbf{H}$ 中的一族元素。事实上，也就是考虑如下算子的逆：

$$\forall n\in\Gamma,\qquad Uf[n]=\left\langle f,\phi_n\right\rangle.$$

定义 1.1 $\mathbf{H}$ 中的序列 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 称为 $\mathbf{H}$ 的框架，如果存在两个正常数 A,B 使得对任意的 $f\in\mathbf{H}$

$$A\|f\|^2\le\sum_{n\in\Gamma}|\left\langle f,\phi_n\right\rangle|^2\le B\|f\|^2.$$

当 $A=B$ 的时候，我们称框架为紧框架。

当框架条件满足的时候，算子 U 称为框架算子。

例：假定 $\mathbf{H}$ 是一个有限维的 Hilbert 空间， $\operatorname{span}\{f_1,\dots,f_n\}=\mathbf{H}$ ，那么 $\{f_1,\dots,f_n\}$ 是一个框架。

例：假定 H 是 $L^2(R)$ 的子空间，其中函数 Fourier 变换支集为 $[-\pi/T,\pi/T]$ 。如果 $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty,\lim_{n\to-\infty}t_n=-\infty$ ，且

$$\delta=\max_n|t_n-t_{n+1}|<T,$$

那么

$$\{\sqrt{\frac{t_{n+1}-t_{n-1}}{2T}}h_T(t-t_n)\}_{n\in Z}$$

是一个框架，且框架界为 $A\ge(1-\delta/T)^2,B\le(1+\delta/T)^2$ 。

现在，我们考虑如下问题：如何重建 f 通过 $Uf[n]$? 也就是，如何求算子 U 的伪逆。我们令

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \sum_{n\in\Gamma} x[n]^2 < +\infty\}.$$

我们设置

$$\mathbf{Im}U \ := \ \{Uf : f \in \mathbf{H}\}.$$

命题 1.1 如果 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 是一个框架，且其中的元素线性相关。那么， $\mathbf{Im}(U)$ 真包含于 $\ell^2(\Gamma)$ ，且 U 允许无限个左逆 $\bar{U}^{-1}$:

$$\forall f \in \mathbf{H}, \qquad \bar{U}^{-1}Uf = f.$$

我们称满足下列条件的 U 的左逆 $\tilde{U}^{-1}$ 为伪逆：

$$\forall x \in (\mathbf{Im}U)^{\perp}, \qquad \tilde{U}^{-1}x = 0.$$

对于算子 U ，我们定义其伴随算子 U^* 为 $\langle f, U^*x\rangle = \langle Uf, x\rangle$.

定理 1 伪逆满足

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*.$$

$\tilde{U}^{-1}$ 是最小的 *sup norm* 左逆。如果 U 是一个有框架界 A, B 的框架算子，那么

$$\|\tilde{U}^{-1}\|_S \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

2 对偶框架

令 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 是界为 A, B 的框架。那么，其对偶框架定义为

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1}\phi_n$$

满足

$$\forall f \in \mathbf{H}, \qquad \frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\Gamma} |\left\langle f, \tilde{\phi}_n \right\rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2,$$

和

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = \sum_{n\in\Gamma} \langle f, \phi_n\rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n\in\Gamma} \left\langle f, \tilde{\phi}_n \right\rangle \phi_n.$$

如果框架是紧的，即 $A = B$ ，那么 $\tilde{\phi}_n = A^{-1}\phi_n$.

3 双正交基

Riesz 基是一个框架，其中的元素线性独立。也就是 $\mathbf{Im}(U) = \ell^2(\Gamma)$ 。那么其对偶框架称之为对偶 Riesz 基。回忆

$$\phi_p = \sum_{n\in\Gamma} \left\langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \right\rangle \phi_n$$

那么，线性独立暗示：

$$\left\langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \right\rangle = \delta[p-n].$$

4 部分重建

假定 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 是子空间 V 的一组框架, 此处 V 为信号空间 H 的子空间。那么, $Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$ 仅仅给出了 f 的部分信息。通过这些信息，我们不能完全重建 f ，但是我们能够计算出 f 在 V 上的正交投影。事实上，这个正交投影为

$$P_V f = \sum_{n\in\Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

5 计算方法

如何通过 $Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$ 有效的恢复 f 呢？当然，一个简单的方法是计算 ϕ_n 的对偶框架

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1}\phi_n$$

那么

$$f = \sum_{n\in\Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n.$$

但是，在很多应用中， ϕ_n 可能依赖于信号 f ，那么我不能事先计算对偶框架。我们现在介绍一个更为直接的方法。注意到

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = (U^*U)^{-1}(U^*U)f = L^{-1}Lf,$$

此处

$$Lf = U^*Uf = \sum_{n\in\Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

我们需要计算 $f = L^{-1}g$ 对于 $g \in \mathbf{H}$ 。我们下面定理描述了一个迭代算法。

定理 2 *(Extrapolated Richardson)* 令 $g \in \mathbf{H}$ 。令 $\gamma > 0$ 是一个松弛参数。对任意的 $n > 0$ 定义

$$f_n = f_{n-1} + \gamma(g - Lf_{n-1}).$$

如果

$$\delta = \max\{|1-\gamma A|, |1-\gamma B|\} < 1$$

那么

$$\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|$$

因此 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ 。

6 Frame 射影和减噪

Frame 的一个重要特征就是冗余性，这可用于信号去噪。我们考虑如下的射影算子

$$P : \ell^2(\Gamma) \to \mathbf{Im}(U).$$

命题 6.1 从 $\ell^2(\Gamma)$ 到 $\mathbf{Im}U$ 上的正交射影为

$$Px[n] = U\tilde{U}^{-1}x[n] = \sum_{p\in\Gamma} x[p] \left\langle \tilde{\phi}_p, \phi_n \right\rangle.$$

假定框架系数 $Uf[n]$ 有附加噪声 $W[n]$ 。那么，应用射影算子 P ，我们有

$$P(Uf + W) = Uf + PW.$$

因为 P 是一个正交射影， $\|PW\| \leq \|W\|$.

命题 6.2 假定 $\|\phi_n\| = C, \forall n \in \Gamma$ 。如果 W 是一个均值为 *0*，方差 $E\{|W[n]|^2\} = \sigma^2$ ，那么

$$E\{|PW[n]|^2\} \leq \frac{\sigma^2 C^2}{A}.$$

如果框架是紧的，那么等号成立。

注 1 本节内容主要取材于 *Chapter 5 in “A wavelet tour of signal processing” by S. Mallat.*

Project 2: 对一有限维 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 产生一框架 $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ 。取一 $f \in H$ ，那么：

1: 计算框架系数 $\langle f, \phi_k \rangle, k = 1, \ldots, N$ ，并加入白噪声 W_k 。

2: 通过 $\langle f, \phi_k \rangle + W_k, k = 1, \ldots, N$ ，用 Extrapolated Richardson 算法重建 f 的近似 $\tilde{f}$ ，并考察随着 N 的增长， $\|f - \tilde{f}\|$ 的变化。