Fourier 变换

1 从 Fourier 级数到 Fourier 变换

Fourier 级数处理了 2π 周期函数。那么对于周期比 2π 大的函数呢？对于非周期函数呢？这时候 Fourier 级数就应该推广为 Fourier 变换。

回顾 Fourier 级数定义：若 $f : R \to C$ 是 2π 周期函数，且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 $f(x)$ 的 Fourier 级数就是

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

此处，

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{1}$$

如果 $f(x)$ 是平方可积的 4π 周期函数，就不能直接利用上述公式作 Fourier 级数展开。但是， $f(2x)$ 是个 2π 周期函数，因此，我们有

$$f(2x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_k f_k e^{ikx},\ f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) e^{-ikx/2} dx.$$

因此，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_k f_k e^{ikx/2}.$$

同理，如果 $f(x)$ 是在一个周期上平方可积的 $2n\pi$ 周期函数，则有

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} (\frac{1}{n} \sum_k f_k e^{ikx/n}),\ f_k = \int_{-n\pi}^{n\pi} f(x) e^{-ikx/n} dx.$$

如果我们可以找到函数 $\widehat{f}(w)$ 使得 $\widehat{f}(k/n) = f_k$, 那么上式括号内就可以写成

$$\frac{1}{n} \sum_k \widehat{f}(k/n) e^{ikx/n}.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_k \widehat{f}(k/n) e^{ikx/n} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \tag{2}$$

由此，只要 $f \in L^2(R)$, 而且可以找到 $\widehat{f}$ 使得 (2) 成立，就有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)e^{iwx}dw.$$

纯粹就形式而言，类比 (1), 我们可有

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx, w \in R.$$

$\widehat{f}$ 称为 f 的 Fourier 变换。

2 性质

为符号描述方便，我们也用 $\mathcal{F}[f(x)](w)$ 表示 Fourier 变换。那么下面的性质容易验证：

线性：$\mathcal{F}[cf(x)+g(x)](w) = c\mathcal{F}[f(x)](w) + \mathcal{F}[g(x)](w)$.

卷积：$\mathcal{F}[(f*g)(x)](w) = \widehat{f}(w)\widehat{g}(w)$.

缩放平移: $\mathcal{F}[f(x-t)](w) = e^{-itw}\widehat{f}(w), \mathcal{F}[f(ax)](w) = \frac{1}{a}\widehat{f}(w/a)$.

导函数：如果有 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \mathcal{F}(f')(w) = iw\widehat{f}(w)$.

3 理论

现在，我们面临的问题是：什么样的条件可以保证 $\widehat{f}$ 存在，再者，什么样的条件下可还原 f.

3.1 L^1 理论

注意到

$$|\widehat{f}(w)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)e^{-iwx}|dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

因此，只要 $f \in L^1(R)$, 则 $\widehat{f}(w)$ 存在. 但是 $\widehat{f}(w)$ 却未必 $\in L^1(R)$. 反例：

$$f(x) = e^{-x}, x \ge 0; \quad f(x) = 0, x < 0. \tag{3}$$

容易验证 $f \in L^1(R)$, 但 $\widehat{f}(w) = \frac{1-iw}{1+w^2} = \frac{1}{1+iw}$ 不属于 $L^1(R)$ 。如果 $\widehat{f}(w) \in L^1(R)$ 则 $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)e^{iwx}dw$ 可积分。但积分却未必等于 f. L^1 的 Fourier 变换理论描述如下：

若 $f \in L^1(R)$ 则 $\widehat{f}$ 存在且连续。若 $\widehat{f}$ 也属于 $L^1(R)$, 则 $f(x)$ 在 x 连续，且

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)e^{iwx}dw.$$

3.2 L^2 理论

但是，我们在讨论 Fourier 级数得时候，更多关心的是 L^2 函数。注意到有些 $L^2(R)$ 函数不在 $L^1(R)$ 内。同时也有些 $L^1(R)$ 的函数不在 $L^2(R)$ 内。可见， $L^1(R), L^2(R)$ 不互相包含，但也不互相排斥。例如，(3) 中定义的函数 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$, 而且 $\widehat{f} \in L^2(R)$. 其实这是个普遍的现象，只要 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ ，则 $\widehat{f}$ 存在且属于 $L^2(R)$. L^2 的 Fourier 变换理论是说：

若 $f, g \in L^1(R) \cap L^2(R)$ **则** $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(R)$ **且** $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle$, **其中** $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

4 Poisson 和

我们从 2π 周期的函数出发，经过黎曼和的概念得到平方可积但非周期函数的 Fourier 变换。现在反过来假如先有非周期性函数 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 和它的 Fourier 变换 $\widehat{f}$. 考虑如下函数级数

$$f_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi).$$

若 $f_p(x)$ 存在，亦即上列级数对任意 $x \in R$ 收敛，则 $f_p(x + 2\pi) = f_p(x)$, 可见 $f_p(x)$ 是 2π 周期函数，且容易验证其属于 $L_p^2(-\pi, \pi)$ 。可对其进行 Fourier 级数展开，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \tag{4}$$

这就是 poisson 求和公式。

一个特例是：

$$\sum_k e^{-a(4k\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\sum_k e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

这个公式在分析与数论中有许多非常重要的应用，黎曼曾经用它导出 ξ 函数的显式表达公式。

如果 $f \in L^2(R)$ 但是 $\mathrm{supp} f = [-\pi, \pi]$, 那么 f_p 必定存在。而且当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 $f_p(x) = f(x)$. 在这种情况下，

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)e^{-ikx}dx.$$

此时， poission 求和公式回到了 Fourier 级数定义。

Poission 求和公式有几个常见的变形。例如：

$$\sum_k f(x-kT) \ = \ \frac{1}{T}\sum_k \widehat{f}(\frac{2k\pi}{T})e^{\frac{i2k\pi x}{T}}.$$

代入 $x=0, T=1$ 后得到

$$\sum_k f(k) \ = \ \sum_k \widehat{f}(2k\pi).$$

事实上，(4) 左右两边都是无穷求和公式，为保证 poission 公式严格成立，我们需要加一定的条件。一组充分条件是

$$f \ \in \ L^1(R)\cap L^2(R),$$

且

$$\widehat{f}(\omega) \ = \ O\left(\frac{1}{(1+|\omega|)^2}\right).$$

5 时频矛盾

我们能否构造一个函数 f，使得 f 的非 0 函数值集中在局部时间上，其 Fourier 变换也局部在某个局部频率域上呢？假如存在一个常数 $A>0$ 使得 $\mathrm{supp} f \subset [-A,A]$, 则称 f 为有界支集函数，若 $\widehat{f}$ 也为有界支集函数，我们成 f 为有界频宽。那么，我们的结论是：**如果 $f\not\equiv 0$ 是有界支集函数，它就不可能是有界频宽**。我们这里只看个特例：若 $f\not\equiv 0, \mathrm{supp} f\subset[-\pi,\pi]$, 如果 $\mathrm{supp}\widehat{f}\subset[-\Omega,\Omega]$, 则对所有 $k\in Z$ 只要 $|k|\geq\Omega$ 就有 $\widehat{f}(k)=0$. 套用 poission 公式，我们有

$$f(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\Omega}^{\Omega}\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

但是有限个正弦余弦波的和，不可能是有界支集。因此，f 不是有界频宽。

下面我们介绍如果 f 是有界支集函数，其在频率域上的表现。如所知，$\widehat{f}$ 是 $R\to C$ 上的一个函数。若用定义

$$\widehat{f}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx, \quad \zeta\in C$$

则可将 $\widehat{f}$ 拓展到复函数。如果 $f\in L^2(R)$ 且 $\mathrm{supp} f\subset[-A,A]$ 。令 $\zeta=u+iv$, 则 $e^{-i\zeta x} = |e^{vx-iux}|=|e^{vx}||e^{-iux}|=|e^{vx}|\leq e^{|v||x|}\leq e^{|\zeta||x|}$ 所以

$$|\widehat{f}(\zeta)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|e^{|\zeta||x|}dx\leq\left(\int_{-A}^{A}|f(x)|dx\right)e^{A|\zeta|}.$$

我们可以忽略一些细节，下个简单的结论：

$$\mathrm{supp} f \subset [-A, A] \Rightarrow |\widehat{f}(\zeta)| \le Ce^{A|\zeta|}.$$

Paley-Wiener 定理说，其反向命题也是对的。即：

$$\exists A > 0, \mathrm{supp} f \subset [-A, A] \Leftrightarrow \exists C > 0, \forall \zeta \in C, |\widehat{f}(\zeta)| \le Ce^{A|\zeta|}.$$

6 Shannon 定理

上面我们讨论了有界支集函数 f 在频率域上的表现，现在看看有界频宽函数在时间域上的性质。假如存在某个固定的 $N \in \mathbf{N}$ 使得当 $|w| \ge N\pi$ 时， $\widehat{f}(w) = 0$. 这表示 $f(x)$ 不含有无穷多高频分量。这就如同多项式函数没有无穷多高次项一样。可以想象这样的函数不太复杂。例如，对于三次多项式，我们可通过 4 个样本，获得该多项式表现形式。有限频宽函数也有类似特性：可从样本获得整个函数。这就是 Shannon 取样定理。与多项式不同，理论上我们需要无穷多个样本，但这些样本可以是离散的。再者， Shannon 使用函数 $\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ 来合成整个函数.

事实上，我们只要知道 $f(\frac{k}{N}), k \in \mathbf{Z}$ 便得知

$$f(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{N}\right) \mathrm{sinc}(N\pi x - k\pi).$$

我们首先推导上述公式：若 f, N 如前所述，则

$$\sum_k \widehat{f}(w - 2N\pi k)$$

是一个 $2N\pi$ 周期函数，且若 $w \in [-N\pi, N\pi]$, 它就是 $\widehat{f}(w)$. 套用 poisson 公式，我们有

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{2N\pi} \sum_k \mathcal{F}[\widehat{f}](\frac{k}{N})e^{ikw/N},$$

此处， $w \in [-N\pi, N\pi]$.

注意到 $\mathcal{F}[\widehat{f}](\frac{k}{N}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{-ikw/N}dw = 2\pi f(-k/N)$. 因此，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N\pi}^{N\pi} \widehat{f}(w)e^{ixw}dw \\ &= \frac{1}{2N\pi} \sum_k f(k/N) \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{i(x-k/N)w}dw, \end{aligned}$$

上式中的积分等于 $2\sin\left((x - \frac{k}{N})N\pi\right)/(x - \frac{k}{N})$.