Fourier 级数

1 概念

假定 f 是定义在长度为 L 的区间 $[a,b]$ 上的可积函数，那么 f 的 Fourier 级数形式定义为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi inx/L},$$

此处

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x) e^{-2\pi inx/L} dx.$$

我们通常考虑 $a=-\pi, b=\pi, L=2\pi$ 的情形。此时，

$$f(\theta) \ \sim \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta},$$

此处

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

我们称如下形式的级数为三角级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx/L}$$

如果一个三角级数仅仅包含有限个非 0 项，那么叫做三角多项式。

我们先看几个例子：

例子 1 令 $f(\theta)=\theta, \theta\in[-\pi,\pi)$ 。那么，

$$f(\theta) \ \sim \ 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

例子 2 我们称三角多项式

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

为 N 阶 **Dirichlet** 核 。其 *Fourier* 级数仍是 $D_N(x)$ 。 $D_N(x)$ 一个更为紧凑的形式是

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

例子 3 我们称 $P_r(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\theta}$ 为 *Poisson* 核，此处 $\theta\in[-\pi,\pi], 0\le r<1$. $P_r(\theta)$ 的 *Fourier* 级数仍是 $P_r(\theta)$. $P_r(\theta)$ 一个较为简单的形式是

$$P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

我们定义函数 f 的 N 阶 Fourier 级数的部分和是

$$S_N(f)(x) \;=\; \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}.$$

现在，我们关心的问题是

$$\lim_{N\to\infty}S_N(f)(\theta)=f(\theta), \qquad \forall\theta?$$

事实上，即使我们假定 $f(\theta)$ 是一个连续周期函数，上述结论也并不总是成立。如果我们假定函数 f 是可微的，那么我们可以证明 f 的 Fourier 级数一致收敛 f 。此外，倘若在 Cesaro 或 Abel 意义下，上述收敛结果总是成立。我们将稍后详细介绍。我们首先不加证明的介绍一个 Fourier 级数唯一性方面的结果。在 Fourier 级数唯一性方面，人们关心如下问题：

如果 f 和 g 有同样的 Fourier 系数，那么 f 和 g 是否相等？

定理 1 假定 f 是周期为 2π 的可积函数且 $\hat{f}(n)=0$ 对所有 $n\in\mathbf{Z}$ 。那么， $f(\theta_0)=0$ 当 f 在点 θ_0 上连续的时候。

2 卷积

给两个定义在 $\mathbf{R}$ 上的 2π 周期函数 f 和 g ，那么我们定义卷积 $f*g$ 为

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dy.$$

通过变量替换，我们看到

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy.$$

通过卷积，我们可将 $S_N(f)$ 表示为如下形式：

$$\begin{aligned}S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{in(x-y)}dy\right) \\
&= (f * D_N)(x)
\end{aligned}
$$

此处， $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ 是 N 阶 Dirichlet 核。

我们首先介绍一下卷积的基本性质：

命题 2.1 假定 f, g 和 h 都是 2π 周期可积函数，那么：

1. $f * (g+h) = f * g + f * h.$

2. $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg), c \in \mathbf{C}.$

3.$f * g = g * f.$

4. $(f * g) * h = f * (g * h).$

5. $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ 。

假定 K_n 是 2π 周期函数。我们称函数序列 $K_n, n = 1, 2, \ldots$ 是 Dirac 序列，如果他们满足如下条件

1.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1.$$

2. 存在 $M > 0$ 使得对所有 $n \geq 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq M.$$

3. 对每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|dx = 0,$$

定理 2 令 $K_n, n = 1, 2, \ldots$ 是 *Dirac* 序列， f 是可积的 2π 周期函数。那么

$$\lim_{n\to\infty}(f * K_n)(x) = f(x)$$

当 f 在 x 处连续的时候。如果 f 处处连续，那么则是一致收敛。

回忆

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x).$$

遗憾的是， D_N 不是一个 Dirac 序列。因此，我们不能采用上述定理证明 Fourier 级数的收敛性质。

3 Cesaro 和

假定我们给了一个复数序列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$. 我们定义 n 阶部分和

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

令

$$\sigma_N := \frac{s_0 + \cdots + s_{N-1}}{N}.$$

那么，σ_N 被称作 N 阶 Cesaro 和。如果 $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma$ 。那么，我们说级数 $\sum_k c_k$ 在 Cesaro 和意义下收敛于 σ 。那么，我们先在考虑 Fourier 级数的 N 阶 Cesaro 和：

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N}.$$

一个简单的观察是

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x),$$

此处

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_N(x)}{N}.$$

引理 3.1

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

是一个 *Dirac* 序列。

那么，我们有如下结果

定理 3 如果 f 是一个可积 2π 周期函数，那么 f *Fourier* 级数的 *Cesaro* 和在 f 每一个连续点上收敛于 f 。如果 f 是一个连续 2π 周期函数，那么 f *Fourier* 级数的 *Cesaro* 和一致收敛于 f 。

推论 3.1 连续的 2π 周期函数能被三角多项式一致逼近。

4 Abel 和

一个复数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ 被称作 Abel 和为 s ，如果对每一个 $0 \le r < 1$, 级数

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$$

收敛，且

$$\lim_{r\to 1} A(r) = s.$$

对于函数 f 的 Fourier 级数

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

我们定义其 Abel 和为

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{in\theta}.$$

一个有用的观察是

$$A_r(f)(\theta) = (f * P_r)(\theta),$$

此处,

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

引理 4.1 如果 $0 \le r < 1$ ，那么

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

是一个 *Dirac* 序列，随着 r 趋向于 1.

定理 4 如果 f 是一个可积 2π 周期函数，那么 f *Fourier* 级数的 *Abel* 和在 f 每一个连续点上收敛于 f 。如果 f 是一个连续 2π 周期函数，那么 f *Fourier* 级数的 *Abel* 和一致收敛于 f 。

5 逐点收敛

定理 5 （逐点收敛定理）若 $f(x)$ 是一个连续 2π 周期函数。对某个 x, 若存在常数 $\delta > 0, M < \infty$, 使得对所有 $h \in (-\delta, \delta)$, $|f(x+h) - f(x)| \le M|h|$. 则

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x).$$

6 Gibbs 现象

如果 $f(x)$ 在某点 x_0 不连续, 但是左右极限存在, 而且 $f(x)$ 在 x_0 两侧附近平滑。则 $S_N(f)(x_0)$ 将收敛到 $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. 更有趣的是， $S_N(f)(x)$ 在 x_0 两侧都有射过的部分。这一部分的“宽

度”随着 N 的增大而变窄，但高度却大约是个常数。这是一个非常著名的现象，称为 Gibbs 现象。

1898 年提出这个观察现象的是美国物理学家 Michelson, 他曾经因为测定光速以及证明以太不存在获得 1907 年的诺贝尔物理学奖。1880 年左右，英国物理学家 Lord Kelvin 利用类比积分器发明了一种称作 Harmonic Analyzer 的计算器，其功能是可以依据输入的 f 图形计算其三角多项式系数，当时用于海潮研究中。 1897 年， Michelson 设计了一些技术，使得这种计算器可以算出更高项的 Fourier 系数，起先是 20 项，后来是 80 项。他带着这个计算器参加 1900 年在巴黎举行的世界博览会，得了首奖。

从这个计算器的输出， Michelson 观察到如下现象。令 $f(x)=x, x\in[-\pi,\pi)$, 并拓展为一个 2π 周期函数，显然 $f(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 不连续。我们只看 $-\pi,\pi$ 两点就可以了。根据

$$f(x)=2(\sin x-\sin 2x/2+\sin 3x/3-\cdots)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

下面两个图分别显示了 $n=20,40$ 的图形，显然 $S_n(f)(x)$ 都射过一点点，而且过头的程度不随着 n 的增大而降低。

1899 年， Gibbs 回应了 Michelson 的发现。他证明了，上述 $S_n(f)(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 附近最大值减去最小值趋近于 $4\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$. 上下超射的部分是 $2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx-\pi\approx 0.562281$.

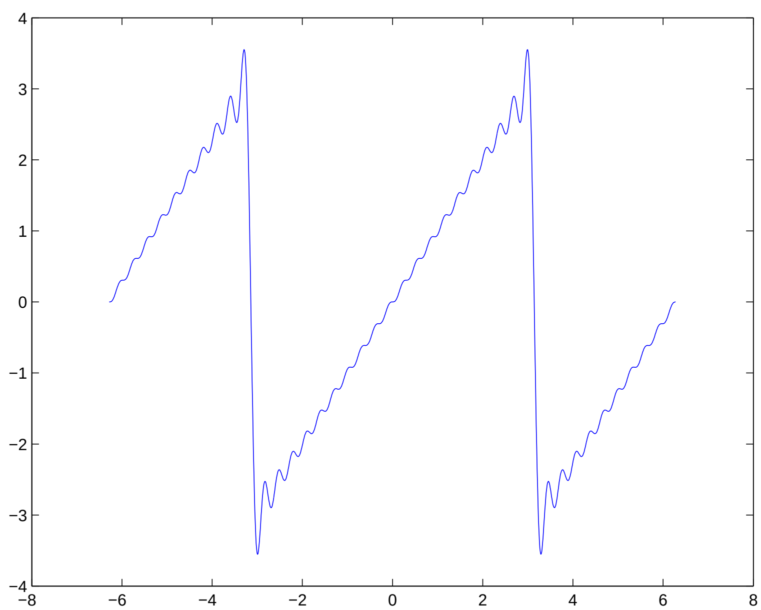

Fig.1.20 term

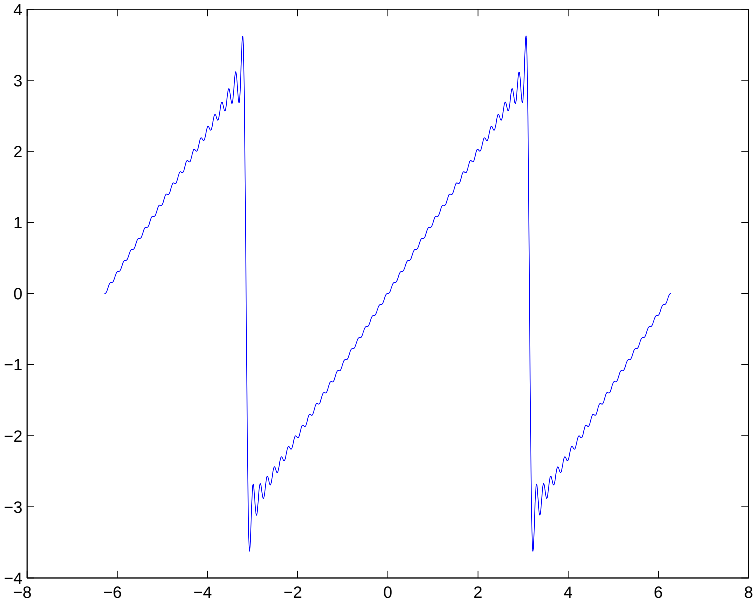

Fig.2.40 term

为方便计算 Gibbs 现象中超射部分，我们取一个比较方便的 2π 周期函数 $f(x)=\pi-x, x\in[0,2\pi)$. 这个 $f(x)$ 在 $x=2k\pi$ 处不连续。 $f(x)$ 是奇函数，因此 $a_n=0$. 容易算得

$$S_N(f)(x)=2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}.$$

令 $g_N(x)=S_N(f)(x)-f(x)$. 则 $g_N'(x)=2\sum_{n=1}^{N}\cos nx+1=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}=\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$. 那么， $g_N(x)$ 在 0 的右边第一个相对极值出现于 $x_N=\frac{\pi}{N+1/2}$. $g_N(x)$ 的另一个表达式是

$$g_N(x)=g_N(0)+\int_0^x\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}dx.$$

考察

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}g_N(x_N) &= \lim_{N\to\infty}\int_0^{x_N}\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}dx-\pi\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sin 1/2(\frac{\theta}{N+1/2})}\frac{1}{N+1/2}d\theta-\pi=2\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta-\pi.\end{aligned}$$

Project: **编写程序观察多个不同函数的** Gibbs **现象。并考虑减少** Gibbs **现象的方法。**

7 Parseval 定理

我们现在考虑在平方平均意义下， Fourier 级数的收敛性质：

引理 7.1 如果 f 是可积的 2π 周期函数，那么

$$\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_{|n|\leq N} c_n e_n\|$$

对所有的复数 c_n, 此处 $e_n(\theta) := e^{in\theta}$ 。此外，等式成立当且仅当 $c_n = \hat{f}(n), |n| \leq N$.

定理 6

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f))\|_2 = 0,$$

而且,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$