

# 数值逼近

许志强



# 目录

<b>第一章</b>	<b>Weierstrass 逼近定理与卷积逼近</b>	<b>5</b>
1.1	Weierstrass 逼近定理 . . . . .	5
1.2	卷积逼近 . . . . .	7
1.3	Fourier 级数 . . . . .	9
<b>第二章</b>	<b>多项式插值</b>	<b>13</b>
2.1	Lagrange 插值公式 . . . . .	14
2.2	Newton 插值公式 . . . . .	15
2.3	差商 . . . . .	17
2.4	多项式插值的误差 . . . . .	19
2.5	插值算子 . . . . .	20
2.6	二元多项式插值 . . . . .	22
<b>第三章</b>	<b>多项式最佳逼近</b>	<b>27</b>
3.1	$L_\infty$ 范数 . . . . .	27
3.2	$L^1$ 范数 . . . . .	30
3.3	$L^2$ 范数 . . . . .	32
<b>第四章</b>	<b>Padé 逼近</b>	<b>37</b>
4.1	基本理论 . . . . .	37
4.2	$\varepsilon$ -算法 . . . . .	40
<b>第五章</b>	<b>平方逼近</b>	<b>43</b>
5.1	定义 . . . . .	43
5.2	直交函数系与广义Fourier级数 . . . . .	43
5.3	几种特殊的直交多项式 . . . . .	46

<b>第六章 样条函数</b>	<b>49</b>
6.1 样条函数	49
6.2 B-样条函数	50
6.2.1 截断幂插商	51
6.2.2 卷积观点	51
6.2.3 B-样条函数性质	51
<b>第七章 非均匀样条函数</b>	<b>53</b>
7.1 定义	53
7.2 递归公式	54
7.3 Schoenberg-Whitney定理	55
<b>第八章 框架(I)</b>	<b>57</b>
8.1 定义	57
8.2 伪逆	57
8.3 对偶框架	59
<b>第九章 框架II</b>	<b>61</b>
9.1 Riesz基	61
9.2 逆框架计算	61
9.3 框架投影与减噪	62
9.4 采样与量子化	63
<b>第十章 Gabor框架和小波框架</b>	<b>65</b>
10.1 Gabor框架	65
10.2 Gabor框架的对偶框架	68
10.3 特殊函数	68
10.4 紧框架	68
10.5 小波框架	69

# 第一章 Weierstrass 逼近定理与卷积逼近

逼近论的基本思想即是采用简单的函数去逼近复杂的函数。最为简单的函数则莫过于多项式函数。因此,人们首先考虑了多项式函数对一般函数的逼近问题。Weierstrass 逼近定理则表明,对于闭区间上任意连续函数,均存在一多项式序列对其进行一致逼近。这为人们采用多项式函数逼近一般的连续函数提供了理论基础。

## 1.1 Weierstrass 逼近定理

**定理 1.1** (Weierstrass 逼近定理) 假设  $f \in C[a, b]$ . 那么,对任意的  $\varepsilon > 0$  存在一个多项式  $P$  使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

**证明:** 我们将介绍 Bernstein 的构造性证明。不失一般性,我们假定区间  $[a, b] = [0, 1]$ . 对于给定的  $f \in C[0, 1]$ , 我们定义如下的多项式序列:

$$B_n^f(x) := \sum_{k=0}^n f(k/n) B_{n,k}(x),$$

此处

$$B_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

我们将证明  $B_n^f$  在区间  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ , 也就是说,对任意的  $\varepsilon > 0$  存在一个  $n_0$ , 当  $n \geq n_0$  时, 我们有

$$\max_{x \in [0,1]} |B_n^f(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这个结论蕴含着 Weierstrass 逼近定理. 为证明这一结论, 我们考察

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n^f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f(x) B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f(k/n) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{|k-nx| \leq n^{3/4}} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) + \sum_{|k-nx| > n^{3/4}} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) \\ &\leq \epsilon_n + 2M \sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x), \end{aligned}$$

此处,

$$\epsilon_n := \max_{(k,x): |k-nx| \leq n^{3/4}} |f(x) - f(k/n)|, \quad M := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

由  $f$  的连一致连续性可知, 随着  $n$  的增大,  $\epsilon_n$  趋向于 0. 我们现在考察

$$\sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x).$$

我们宣称

$$n^{3/2} \sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x) < nx(1-x) \leq n/4.$$

因而, 我们有

$$\sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} \right)^{1/2}.$$

我们最终得到

$$|f(x) - B_n^f(x)| < \epsilon_n + \frac{M}{2} \left( \frac{1}{n} \right)^{1/2}.$$

我们仍然需要证明如上的宣称:

$$n^{3/2} \sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x) < nx(1-x) \leq n/4.$$

注意到

$$n^{3/2} \sum_{|k-nx| > n^{3/4}} B_{n,k}(x) < \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 B_{n,k}(x)$$

和

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 B_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq n/4.$$

我们能证明这个宣称.

证毕.

**注 1.1** *Bernstein* 基底  $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  在上述证明里边扮演重要角色. 现在, 这个基底也在计算机辅助几何设计中应用广泛, 例如 *Bézier* 曲线即是用 *Bernstein* 基底来表示. *Bernstein* 基底的高维推广直到今天仍然是一个令人感兴趣的研究课题.

## 1.2 卷积逼近

上面我们介绍的证明并非 Weierstrass 的原始证明. Weierstrass 是如何证明该定理的呢? 他采用了卷积逼近的方法. 我们下面将介绍这一方法. 假定  $f$  和  $g$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的两个函数, 那么它们的卷积可形式定义为:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

我们有如下的定理:

**定理 1.2** 如果  $f$  和  $g$  属于  $L^1(\mathbb{R})$ , 那么  $f * g$  也在  $L^1(\mathbb{R})$  中. 且  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

**练习 1.1** 证明

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

从上面的结果可看出, 卷积运算满足分配律与结合律. 那么, 是否存在一个单位元  $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ , 使得对任意的  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 我们均有

$$f * \delta = f?$$

事实上, 在通常函数的意义下, 这样的函数  $\delta$  并不存在. 但是, 我们可以构造一个函数序列  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , 使得当  $n$  趋向于无穷的时候,  $K_n * f$  在  $f$  连续的紧集上一致收敛到  $f$ . 也就是说, 函数序列  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  逐渐收敛到一个“单位元”.

下面我们介绍 Dirac 序列的定义. 我们说函数序列  $K_1, K_2, \dots$  是一个 **Dirac 序列**(或者说“好核”) 如果满足如下条件:

1. (非负性) 对所有的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n \geq 0$ ;

2. (单位性) 对所有的  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1;$$

3. (能量集中性) 对任意的  $\varepsilon > 0$  和  $r > 0$ , 存在一个正整数  $n_0$ , 使得对所有的  $n \geq n_0$ , 我们有

$$\int_{|x| \geq r} K_n(x)dx < \varepsilon.$$

下面的逼近定理显示了 Dirac 序列的行为接近于一个单位元:

**定理 1.3** 假设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上有界且分段连续函数, 且  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是一个 Dirac 序列. 那么序列  $\{K_n * f\}_{n \in \mathbb{N}}$  在每一个  $f$  连续的紧集上一致收敛于  $f$ .

**证明:** 假定  $M \in \mathbb{R}$  为函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上的一个上界. 假设  $S$  是一紧集, 且  $f$  在其上连续. 注意到  $f$  在  $S$  上一致连续. 那么, 对于任给的  $\epsilon > 0$  存在一个  $r > 0$  使得, 使得对所有的  $x_1, x_2 \in S$  及  $|x_1 - x_2| \leq r$ , 我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

为证明这一定理, 对于  $x \in S$ , 我们考虑

$$\begin{aligned} & |K_n * f(x) - f(x)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \\ &= \int_{|t| \leq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + \int_{|t| \geq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \\ &\leq \int_{|t| \leq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + 2M\epsilon, \end{aligned}$$

此处, 最后一个不等式我们要求  $n \geq n_0$  (能量集中性). 注意到

$$\int_{|t| \leq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} K_n(t)\epsilon dt = \epsilon.$$

那么, 我们最终得到

$$|K_n * f(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2M\epsilon = (1 + 2M)\epsilon.$$

证毕.

下面我们将用卷积逼近证明 Weierstrass 逼近定理. **Laudau** 序列定义为:

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

此处我们可以挑选适当的  $c_n$  使得

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1.$$

Weierstrass 定理为下面命题的推论:

**命题 1.1** 1.  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是一个 Dirac 序列;

2. 对任意的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n * f$  是一个多项式.



### 1.3 Fourier 级数

在这一节里边, 我们将考虑周期为  $2\pi$  的函数  $f$  的逼近问题, 同时显示卷积逼近的另一个应用. 与在  $\mathbb{R}$  上的 Dirac 序列定义类似, 我们可定义在  $[-\pi, \pi]$  上的 Dirac 序列, 亦可定义  $[-\pi, \pi]$  上的卷积. 相应的就有  $[-\pi, \pi]$  上的卷积逼近定理.

给两个定义在  $\mathbb{R}$  上的  $2\pi$  周期函数  $f$  和  $g$ , 那么我们定义卷积  $(f * g)_\pi$  为

$$(f * g)_\pi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy.$$

在不引起混淆的情况下, 我们也省略  $(f * g)_\pi$  中的下标  $\pi$ . 假定对每个  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n$  是  $2\pi$  周期函数. 也就是, 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 均有  $K_n(x) = K_n(x + 2\pi)$ . 我们称函数序列  $K_n, n = 1, 2, \dots$  是以  $2\pi$  为周期的 Dirac 序列, 如果他们满足如下条件

1.

$$K_n(x) \geq 0, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1.$$

3. 对每个  $r > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)|dx = 0,$$

**定理 1.4** 令  $K_n, n = 1, 2, \dots$  是一个以  $2\pi$  为周期的 Dirac 序列,  $f$  是  $2\pi$  周期可积函数. 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

当  $f$  在  $x$  处连续的时候. 如果  $f$  处处连续, 那么则是一致收敛.

我们将依此研究函数  $f$  的 Fourier 级数. 对于  $2\pi$  周期函数  $f$ , 其 Fourier 级数形式定义为

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta},$$

此处

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

我们定义函数  $f$  的  $N$  阶 Fourier 级数的部分和为

$$S_N(f)(\theta) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{in\theta}.$$

那么, 对任给的  $\theta \in \mathbb{R}$ , 我们关心是否  $s_N(f)(\theta)$  收敛于  $f(\theta)$ . 然而, 即使我们假定  $f(\theta)$  是一个连续周期函数, 上述结论也并不总是成立.

下面, 我们从卷积的角度来考虑这一问题. 我们定义 **Dirichlet** 核为

$$D_N(\theta) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \exp(ik\theta).$$

那么,  $f$  的  $N$  阶 Fourier 级数的部分和可表示为

$$S_N(f)(\theta) := D_N * f = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ik\theta),$$

此处

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ikt) f(t) dt.$$

但是, 通常而言,  $D_N$  并非一个 Dirac 序列.

那么, 如何“改造”  $N$  阶 Fourier 级数的部分和, 以使其收敛呢? 我们首先看一下, 人们是如何改造一般的发散级数以使其收敛的. 假定我们有一复数级数

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots.$$

那么, 我们定义其  $N$  项部分和为

$$S_N := \sum_{j=1}^N s_j,$$

那么, 我们说该级数收敛到  $S$  如果  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ . 这是我们通常所用的级数和的定义. 但是, 对于一些级数, 利用这种方式定义的和并不存在, 这时候我们希望改造和的定义, 以使其收敛. 例如, 我们考虑如下的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

其前  $N$  项部分和序列为

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots,$$

其极限并不存在. 我们考虑对其进行如下改造:

$$\sigma_N := \frac{S_1 + \cdots + S_N}{N},$$

即考虑前  $N$  个  $N$  项部分和的平均.  $\sigma_N$  被称第  $N$  个 Cesàro 和. 那么, 一个简单的观察是上面的发散级数的 Cesàro 和极限存在, 且为  $1/2$ .

我们现在用类似的方法对 Fourier 级数进行改造, 即考虑

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N}.$$

令

$$K_N := \frac{1}{N}(D_0 + \cdots + D_{N-1}),$$

那么, 我们称  $K_N$  为 **Fejér** 核.

**引理 1.1** Fejér 核

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)},$$

且是一个 Dirac 序列.

那么, 我们立刻得到

**定理 1.5 (Fejér-Cesàro 定理)** 如果  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的连续函数, 那么

$$\frac{1}{N}(S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f))$$

在  $\mathbb{R}$  的紧集上一致收敛于  $f$ .

那么由上述定理, 我们立刻得到 Weierstrass 第二定理:

**推论 1.1** 令  $f$  为连续的  $2\pi$  周期函数. 那么, 对任意的  $\epsilon > 0$  都有三角多项式  $T$  存在, 使得

$$\max_{|x| \leq \pi} |f(x) - T(x)| \leq \epsilon.$$



## 第二章 多项式插值

应用数学中, 一个经常遇到的问题就是如何通过不完全的信息重建一个函数. 假定  $y = f(x)$  是一个关于  $x$  的函数, 我们知道  $f$  在  $n + 1$  个不同点的函数值. 我们将这  $n + 1$  个点记为  $x_0, \dots, x_n$ , 也就是我们知道如下的函数值:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

所谓多项式插值即为寻找一个多项式  $p$  使得

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

假定  $p$  为次数为  $m$  的多项式, 我们可将其写为如下形式:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, \quad a_m \neq 0.$$

多项式插值就是寻找  $a_0, \dots, a_m$  使得

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.1)$$

这等价于解下面的线性方程组

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_mx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_mx_1^n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

线性方程组 (2.2) 的解存在且唯一的必要条件是  $m = n$ . 因此, 我们选取  $m = n$ . 注意到线性方程组 (2.2) 左边的系数矩阵为范德蒙矩阵. 当插值点  $x_j, j = 1, \dots, n$  两两不同的时候, (2.2) 的系数矩阵就是非奇异的. 也就是说, 如果我们选择  $m = n$ , 那么线性方程组 (2.2) 的解是存在且唯一的. 那么, 如果选择  $m = n$ , 我们能否将插值多项式  $p$  用简单的方法写下来呢? 我们将介绍两种常用的插值公式: Lagrange 插值公式和 Newton 插值公式.

## 2.1 Lagrange 插值公式

我们首先介绍一个插值基函数. 如果我们能找到一个次数为  $n$  的多项式  $l_i$  满足

$$l_i(x_i) = 1 \quad \text{和} \quad l_i(x_j) = 0, \quad i \neq j.$$

那么多项式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

满足插值约束条件 (2.1). 因为  $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  均为  $l_i$  的根, 那么  $l_i(x)$  可写为如下形式:

$$l_i(x) = c(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

其中  $c$  为常数. 根据  $l_i(x_i) = 1$ , 我们可得到

$$c = \frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

因此,

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

我们令  $\omega(x) := (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ . 那么,  $l_i$  能写为

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}.$$

现在, 我们能得到 **Lagrange 插值公式**

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}.$$

总结上述结果, 我们有

**定理 2.1** 令  $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$  是  $[a, b]$  中的任意  $n+1$  个不同点, 且  $f \in C[a, b]$ . 那么, 存在唯一一个次数不超过  $n$  的多项式  $p_n$  满足插值条件 (2.1). 此外, 多项式  $p_n$  可写为如下形式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)},$$

这里,  $\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ .

**例子 2.1** 假定  $f(-1) = 2, f(1) = 1$  和  $f(2) = 1$ . 计算 Lagrange 插值公式.

图 2.1 和图 2.1 分别显示了对高斯函数  $\exp(-x^2)$  和正弦函数  $\sin(x)$ , 在区间  $[-5, 5]$  上, 取 7 个等距结点与 11 个等距结点插值结果.

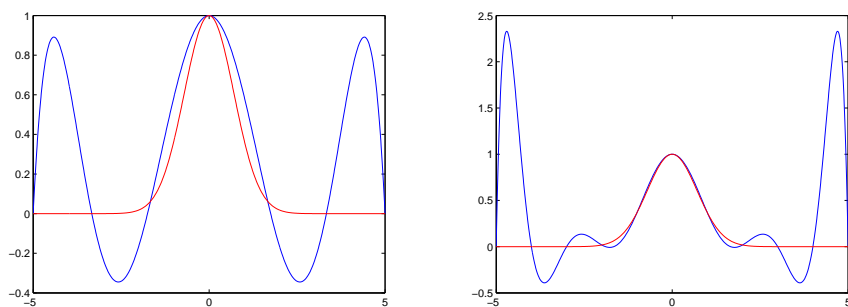


图 2.1: 对高斯函数  $\exp(-x^2)$  分别取 7 个, 11 个等距结点插值结果图.其中红色曲线为原函数图像, 蓝色曲线为插值多项式函数图像.

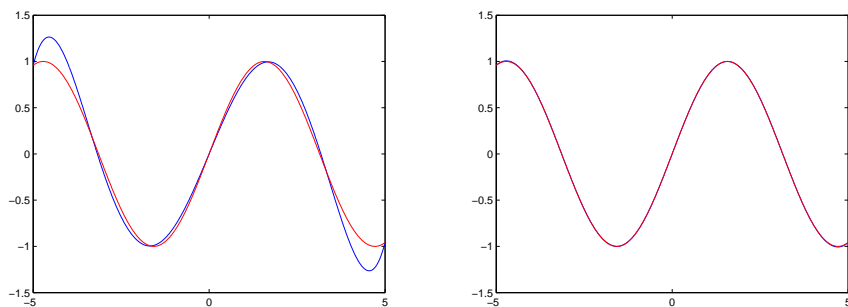


图 2.2: 对正弦函数  $\sin(x)$  分别取 7 个, 11 个等距结点插值结果图.其中红色曲线为原函数图像, 蓝色曲线为插值多项式函数图像.

从上面两图中可看出, 对于高斯函数  $\exp(-x^2)$ , 在增加插值点后, 插值多项式与原函数之间的最大偏差反而增大; 然而对于函数  $\sin(x)$ , 在增加插值点后, 插值多项式明显与原函数更为接近. 我们将在 2.4 节中解释这一现象.

## 2.2 Newton 插值公式

Langrange 插值公式有一个缺点, 如果插值点数变化, 必须重新计算所有项. 人们自然地问: 能否构造一个插值多项式, 使得当插值点数增加 1 的时候, 我们只需增加一项

即可. Newton 插值公式即回答了这一问题. 事实上, 我们希望多项式  $p_n$  可写为如下形式:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

如果对  $n$  较小的情况进行试算, 我们发现可以选择

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

那么, 一般的, 我们猜测可将多项式  $p_n$  写为如下形式:

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + f(x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (2.3)$$

这里,  $f(x_0, \dots, x_i)$  称作  $i$ -阶差商, 通过如下方式定义:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_i) := \sum_{j=0}^i \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0; k \neq j}^i (x_j - x_k)}. \quad (2.4)$$

我们仍需严格证明由 (2.3) 所定义的多项式满足插值条件.

**定理 2.2** 由 (2.3) 所定义的  $n$  次多项式  $p_n$  满足插值条件

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

**证明:** 我们通过归纳法证明这一结论. 容易看出  $n = 0$  的时候结论成立. 为归纳需要, 我们假定插值点数为  $n - 1$  时结论成立. 我们现在考虑插值点数为  $n$  的情形. 我们假设  $q$  为次数不超过  $n$  的多项式且满足插值条件:

$$q(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

由  $p_n$  的定义 (2.3) 可知,

$$p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i), \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

根据归纳假设, 当  $0 \leq i \leq n - 1$  时

$$q(x_i) = p_{n-1}(x_i) = p_n(x_i).$$

我们现在考虑

$$q - p_n.$$

根据多项式插值的唯一性, 多项式  $q$  可由Lagrange插值公式构造. 那么, 一个简单的观察是  $q$  的首项系数为

$$\sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0; k \neq j}^n (x_j - x_k)} = f(x_0, \dots, x_n).$$



注意到, 多项式  $p_n$  的首项系数亦为  $f(x_0, \dots, x_n)$ . 因此,  $q - p_n$  是次数不超过  $n - 1$  的多项式, 且有  $n$  个根  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . 因此,

$$q \equiv p_n.$$

证毕.

## 2.3 差商

在 Newton 插值公式中, 由 (2.4) 所定义的差商扮演重要角色. 事实上, 差商本身就是一个重要的数学概念, 具有丰富的数学性质.

差商一个重要的性质就是递归性, 这使得差商可以快速计算:

**定理 2.3** 由 (2.4) 所定义的差商满足如下递归公式

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \quad (2.5)$$

**证明:** 由 (2.4), 我们有

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_{n-1}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^{n-1} (x_k - x_j)}, \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}. \end{aligned}$$

经由简单的计算可看出

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^{n-1} (x_j - x_k)} - \frac{f(x_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)} \right) = (x_n - x_0) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}.$$

我们现在考虑 (2.5) 的右边

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0} &= \frac{1}{x_n - x_0} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^{n-1} (x_j - x_k)} - \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)} = f(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

证毕.

插商的另外一个重要性质就是所谓的**插商中值定理**. 根据微积分中的中值定理, 若函数  $f$  可导, 则存在  $\min\{x_0, x_1\} < \xi < \max\{x_0, x_1\}$  使得

$$f'(\xi) = f(x_0, x_1).$$

而插商中值定理则可将微积分中的中值定理推广如下:

**定理 2.4** 假定函数  $f$  的  $n$  阶导数存在. 则存在  $\xi$ ,  $\min\{x_0, \dots, x_n\} \leq \xi \leq \max\{x_0, \dots, x_n\}$ , 使得

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

**证明:** 我们构造如下的函数

$$g(x) = f(x) - p_n(x),$$

这里,  $p_n$  为次数不超过  $n$  的多项式, 且  $p_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . 那么, 一个简单的观察是

$$g(x_0) = g(x_1) = \dots = g(x_n) = 0.$$

通过中值定理, 存在  $\xi$  使得  $g^{(n)}(\xi) = 0$ . 也就是, 存在  $\xi$  使得

$$f^{(n)}(\xi) = p_n^{(n)}(\xi).$$

因为  $p_n$  的首项为

$$f(x_0, \dots, x_n)x^n$$

因而

$$p_n^{(n)}(\xi) = n! \cdot f(x_0, \dots, x_n).$$

由此,

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

证毕.

我们下面介绍差商的一些性质:

1. 对任意的  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(\lambda \cdot f)(x_0, \dots, x_n) = \lambda \cdot f(x_0, \dots, x_n);$$

2.  $(f + g)(x_0, \dots, x_n) = f(x_0, \dots, x_n) + g(x_0, \dots, x_n)$ ;

3.  $f(x_0, \dots, x_n)$  是一个关于  $x_0, \dots, x_n$  的对称函数, 也就是任意调换  $x_0, x_1, \dots, x_n$  的位置, 差商的值不变.

4.

$$(f \cdot g)(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_0)g(x_0, x_1, \dots, x_n) + f(x_0, x_1)g(x_1, \dots, x_n) + \dots + f(x_0, \dots, x_n)g(x_n).$$

5. 若  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , 则

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{r_0 + \dots + r_n = m-n} x_0^{r_0} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}.$$

因而,

$$f(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & n > m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

**注 2.1** 假设  $f$  的  $n$  阶导数存在. 一个令人感兴趣的观察是: 倘若我们令所有插值结点  $x_j, j = 1, \dots, n$ , 趋向于  $x_0$ , 那么  $p_n$  趋向于函数  $f$  的 Taylor 展开的前  $n+1$  项. 从这个意义上来说, 多项式插值是对 Taylor 展开的一种离散近似.

**研究问题:**

1. 如果存在一个函数  $h$  使得  $f(x_0, \dots, x_n) = h(x_0 + \dots + x_n)$ , 这里  $n \geq 1$ . 那么,  $f$  一定是一个次数不超过  $n$  的多项式吗? 对于  $n = 1$  的情况, 这个问题在 [1] 中解决. 文献 [2] 考虑了  $n = 2$  的情况, 但这离最终解决该问题还很远.

2. 因为差商是导数的某种近似, 或者说差商是一种离散的导数. 如所知, 在经典的微积分中, 关于导数有很多经典的公式. 那么, 人们自然希望将这些公式扩展到差商, 这方面的研究在理论和实际上均有较为重要的意义. 但是, 直到今天, 这方面的结果仍不完善. 主要集中于将 Leibniz 法则和求导的链式法则扩展到多元差商 (参考 [3, 4, 5]).

## 2.4 多项式插值的误差

如上所述, 构造插值多项式  $p_n$  的原始目的是对函数  $f$  进行近似. 自然, 我们想知道, 倘若  $x$  不是插值结点时,  $|f(x) - p_n(x)|$  的大小. 也就是, 插值多项式对原函数  $f$  近似好坏程度.

**定理 2.5** 假定结点  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  和  $f \in C^{n+1}[a, b]$ . 那么, 对任意的  $x \in [a, b]$ , 存在一个  $\xi \in (a, b)$  使得

$$E(f; x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

这里  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ .

**证明:** 当  $x = x_0, \dots, x_n$  的时候, 上述结果显然成立. 因此, 我们只考虑  $x$  非插值结点的情形. 我们做辅助函数

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)} (f(x) - p_n(x)).$$

这里, 值得注意的是  $t$  为变量, 然而  $x$  是固定的值. 那么, 一个简单的观察是  $F(x) = 0$ ,  $F(x_j) = 0$ ,  $j = 0, \dots, n$ . 那么, 由 Rolle 定理可知  $F^{(n+1)}$  于  $(a, b)$  内有一个根  $\xi$ . 因此, 我们可得到

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)}(f(x) - p_n(x)) = 0.$$

也就是,

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

证毕.

**注 2.2** 由上述定理可知, 对任意的  $n \in \mathbb{N}$ , 倘若  $f$  的  $n+1$  阶导数有界, 那么插值多项式随着插值结点数的增加而收敛于函数  $f$ . 从图 2.1 和图 2.1 的可很好的观察的这一现象. 对于高斯函数  $e^{-x^2}$ , 其高阶导数在区间  $[-5, 5]$  内无界, 因此, 我们没有观察到插值多项式随着插值点数的增多而逼近于高斯函数. 然而正弦函数  $\sin(x)$  任意阶导数在区间  $[-5, 5]$  上都有界, 因此, 我们可看到到插值多项式收敛于  $\sin(x)$ .

我们也能用其它的方法估计误差界. 令  $[a, b]$  是一个有限区间和  $m \in \mathbb{Z}$ . 如果  $f, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f^{(m)}$  分片连续和  $|f^{(m)}(x)| \leq M_m, x \in [a, b]$ , 那么我们说  $f \in W^m(M_m; a, b)$ . 现在, 我们考察

$$E(f; \alpha) := f(\alpha) - p_n(\alpha).$$

我们假定  $\alpha, x_0, \dots, x_n$  包含于区间  $[a, b]$ .

**定理 2.6** 假定  $m \in \mathbb{Z}$  和  $1 \leq m \leq n+1$ . 当  $f \in W^m(M_m; a, b)$ , 存在一个函数

$$K_m(t) = \frac{1}{(m-1)!} E((x-t)_+^{m-1}; \alpha),$$

使得

$$E(f; \alpha) = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt.$$

## 2.5 插值算子

我们考虑如下问题: 如何选择插值结点  $\{x_0, \dots, x_n\}$  才能使得插值多项式  $p_n$  尽可能好的逼近函数  $f$ . 为此, 我们首先介绍插值算子的概念. 我们用  $C[a, b]$  表示区间  $[a, b]$  上连续函数组成的线性空间, 对于其中的元素  $f$ , 定义范数为

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

我们假定插值点集为  $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$ . 定义算子  $X : C[a, b] \rightarrow \Pi_n$ ,  $X(f) \in \Pi_n$  为在结点  $x_i, i = 0, \dots, n$  处插值函数  $f$  的多项式. 我们称  $X$  为Lagrange 算子, 且  $X$  的范数定义为

$$\|X\| := \sup_{\|f\|=1} \|X(f)\|.$$

我们令

$$d^* := \min_{p \in \Pi_n} \|f - p\|.$$

因而,  $d^*$  也就是我们能从  $\Pi_n$  中选择的对函数  $f$  的最佳逼近误差. 下面定理显示, 对于函数  $f \in C[a, b]$ ,  $\|X(f) - f\|$  可被  $\|X\|$  与  $d^*$  进行刻画. 因此, 范数  $\|X\|$  的大小度量了  $X(f)$  与对  $f$  最佳逼近的差距.

**定理 2.7**

$$\|f - X(f)\| \leq (1 + \|X\|)d^*.$$

**证明:** 我们假设  $p^*$  为  $\Pi_n$  中对  $f$  的最佳逼近多项式, 也就是

$$d^* = \|f - p^*\|.$$

我们考虑

$$\begin{aligned} \|f - X(f)\| &\leq \|f - p^*\| + \|p^* - X(f)\| \\ &= d^* + \|X(p^* - f)\| \leq d^* + \|X\| \cdot \|p^* - f\| = (1 + \|X\|)d^*. \end{aligned}$$

证毕.

**定理 2.8** Lagrange 插值算子  $X$  的范数为

$$\|X\| = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)|,$$

此处  $\ell_i$  为 Lagrange 插值基函数.

**证明:** 依据  $\|X\|$  的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sup_{\|f\|=1} \|X(f)\| \\ &= \sup_{\|f\|=1} \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x) \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x) \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)|. \end{aligned}$$

证毕.

对于 Lagrange 算子  $X$  的范数, 人们有如下估计:

**定理 2.9 (Erdős, Brutman)** Lagrange 算子  $X$  的范数满足如下不等式

$$\|X\| \geq \frac{2}{\pi} \log n + 0.5212.$$

注意到算子  $X$  仅仅依赖于插值结点. 一个自然的问题是: 人们能否选择合适的插值结点以使得  $\|X\|$  尽可能接近下界? 我们下面介绍 Chebyshev 点. Chebyshev 多项式定义为

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x).$$

那么, 容易看出, Chebyshev 多项式的零点为  $\cos((2j-1)\pi/2n)$ . 这些点可以作为一类插值结点, 我们称其为 **Chebyshev 结点**.

**定理 2.10** 如果  $X$  是相应于 Chebyshev 结点的 Lagrange 插值算子, 那么

$$0.9625 < \|X\| - \frac{2}{\pi} \log n < 1.$$

## 2.6 二元多项式插值

我们前面介绍了一元多项式插值. 事实上, 对于一元多项式插值, 我们是从函数空间  $\Pi_n$  中选择一函数, 使其插值于区间  $[a, b]$  中的  $n$  个不同点. 我们现将一元多项式插值的二元推广. 我们首先考虑插值问题更一般的描述.

假定函数空间  $F$  是定义在区域  $D$  上的实值函数空间. 我们假定

$$\{f_1, \dots, f_n\}$$

是  $F$  的一组基底. 我们假定有  $n$  个不同的点

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset D.$$

对每个点  $x_i$ , 都有一个与之相应的  $y_i \in \mathbb{R}$  与之对应. 那么, 所谓插值问题, 即指寻找一函数

$$f = \sum_{j=1}^n c_j f_j \in F,$$

满足如下插值条件

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

我们称矩阵

$$(f_j(x_i))_{j=1,\dots,n; i=1,\dots,n}$$

为插值矩阵. 那么, 对任意的数值  $y_i, i = 1, \dots, n$  插值问题均可解的充要条件是插值矩阵非奇异.

**定理 2.11** 令  $F$  是定义在  $D$  上的  $n$  维线性函数空间. 对任意的数值  $y_i, i = 1, \dots, n$ ,  $F$  中存在一个函数  $f$  使得

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

的充要条件是  $0$  数据  $y_i, i = 1, \dots, n$ , 仅被  $F$  中的  $0$  元素插值.

**证明:** 我们首先假定对任意的数值  $y_i$ , 插值问题均可解. 即对任意的  $y_i, i = 1, \dots, n$ , 下面线性方程组的解存在且唯一

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.6)$$

这里  $c_j, j = 1, \dots, n$  是未知变量. 那么, 与 (2.6) 相应的系数矩阵非奇异. 因而, 当  $y_i = 0$ , 线性方程组 (2.6) 只有  $0$  解.

其次, 我们假定  $0$  数据  $y_i, i = 1, \dots, n$ , 仅被  $F$  中的  $0$  元素插值. 也就是线性方程组

$$0 = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.7)$$

只有  $0$  解. 那么, 与 (2.7) 相应的系数矩阵非奇异. 因而, 对任意的数值  $y_i$ , 插值问题均可解. 证毕.

我们称  $n$  维函数空间  $F$  为 **Haar 空间**, 如果  $F$  中的每一个非  $0$  函数落在  $D$  中  $0$  点个数均不超过  $n$ , 或者说如果  $F$  中有一函数落在  $D$  中的零点个数超过  $n$ , 那么该函数必为  $0$ .

**定理 2.12** 假定函数空间  $F$  是定义在  $D$  上的一个实值函数空间, 且有一个基底  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . 那么, 下面的性质是等价的:

- a.  $F$  是一个 Haar 空间.
- b. 对  $D$  中任意  $n$  个不同的点  $x_1, \dots, x_n$  均有

$$\det(f_j(x_i)) \neq 0.$$

我们称 Haar 空间中的任一基底为 **Chebyshev 系统**.

下面是  $\mathbb{R}$  上 Chebyshev 系统的例子:

1.  $1, x, \dots, x^n$
2.  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_n.$

下面是  $(0, \infty)$  上 Chebyshev 系统的例子:

3.  $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_n} \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_n$
4.  $(x + \lambda_1)^{-1}, \dots, (x + \lambda_n)^{-1} \quad 0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n.$

那么, 在  $\mathbb{R}^2$  上, 或更高维的欧式空间, 有连续函数组成的 Chebyshev 系统吗? 下面的 Haar 定理给出了否定的回答.

**定理 2.13 (Haar)** 设  $D$  是欧式空间  $\mathbb{R}^d$  中包含一个内点  $x_0$  的集合, 这里  $d \geq 2$ . 设  $f_1, \dots, f_n, n > 1$ , 定义于  $D$  上, 且其中每个函数均在  $x_0$  中的一个邻域内连续. 则  $F := \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$  不是一个 Haar 空间.

**证明:** 我们假定  $U$  是在包含在  $S$  中以  $x_0$  为中心的小球, 且所有  $f_j, j = 1, \dots, n$  在其内均连续. 我们在  $U$  中选择  $n$  个点  $x_1, \dots, x_n$ . 我们仅仅考虑

$$\det(f_j(x_i)) \neq 0$$

的情形 (否则, 即可推出  $F$  不是一个 Haar 空间). 我们现在固定  $x_3, \dots, x_n$  的位置. 在  $U$  内连续移动  $x_1, x_2$ , 互换其位置. 注意  $U$  是  $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$  中的小球, 因而在移动过程中, 我们可以使得  $x_1$  与  $x_2$  不重合, 且与  $x_3, \dots, x_n$  均不重合. 注意到, 当  $x_1$  与  $x_2$  交换位置后, 行列式

$$\det(f_j(x_i))$$

的前两行也进行了交换, 因而符号发生变化. 由于交换过程是连续的, 且函数  $f_j$  也是连续的. 在交换过程中, 必然有一中间位置使与之相应的行列式为 0. 因而, 空间  $F$  不是 Haar 空间. 证毕.

根据上述定理, 对于二元多项式插值, 我们需要仔细的选择插值结点. 我们首先介绍一些概念. 设  $p_1, \dots, p_n$  是一组线性无关的实系数二元多项式. 令

$$\mathbb{P} := \text{span}\{p_1, \dots, p_n\}.$$

假定  $f$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数,  $x_1, \dots, x_n$  是  $\mathbb{R}^2$  中  $n$  个互异的点. 所谓二元多项式插值即指寻求  $p \in \mathbb{P}$  使得

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$



由 Haar 定理, 为求得插值多项式, 首要问题是选择插值结点组  $x_1, \dots, x_n$ , 使得插值问题(2.8)的解存在且唯一. 若对任意的函数  $f$ , 插值问题(2.8)的解存在且唯一, 我们则称  $x_1, \dots, x_n$  是空间  $\mathbb{P}$  的适定结点组. 我们通常选择空间  $\mathbb{P}$  为次数不超过  $k$  的多项式, 即

$$\Pi_k(\mathbb{R}^2) := \{x^{k_1}y^{k_2} : k_1 + k_2 \leq k\}.$$

我们下面介绍几个构造插值适定结点组的方法. 假设  $p \in \mathbb{P}$  是非 0 多项式. 那么,  $\mathbb{P}$  中的代数曲线定义为如下点集:

$$\{(x, y) : p(x, y) = 0, p \in \mathbb{P}\}.$$

下述引理给出了代数曲线与插值适定结点组的关联.

**引理 2.1** 点组  $x_1, \dots, x_n$  是空间  $\mathbb{P}$  的适定结点组, 必须且只须该点组不在  $\mathbb{P}$  中的任何一条代数曲线.

引理 2.1 显示了构造插值适定结点组与代数曲线密切关联. 因而也在逼近论与代数几何之间架起了一座桥梁. 我们将基于此介绍一个构造适定结点组的方法. 为此, 我们首先介绍代数几何中的一个著名定理: **Bezout 定理**.

**定理 2.14 (Bezout 定理)** 假设  $p_1, p_2$  分别为次数为  $m, n$  的多项式. 如果  $p_1$  和  $p_2$  公共零点多于  $mn$ , 则  $p_1$  和  $p_2$  必有公因子存在.

依据 Bezout 定理, 我们有如下递归构造插值适定结点组的方法.

**定理 2.15** 若  $x_1, \dots, x_k$  是  $\Pi_n$  中的适定结点组, 且它的每个点都不在某条  $\ell$  次不可约代数曲线  $q(x, y) = 0$  上, 这里  $1 \leq \ell \leq 2$ . 则将在该曲线上任取的  $(n+3)\ell - 1$  个不同点与  $x_1, \dots, x_k$  放在一起, 必构成空间  $\Pi_{n+\ell}$  的一个适定结点组.

另一个简单的构造适定结点组的方法是几何特征法. 我们下面首先介绍几何特征的定义.

**定义 2.1** 令  $X \subset \mathbb{R}^2$  且  $\#X = \binom{n+2}{2}$ . 我们称  $X$  满足  $n$  阶几何特征条件如果对每个  $x \in X$  存在直线  $L_1^x, \dots, L_n^x$  使得

$$X \setminus \{x\} \subset L_1^x \cup \dots \cup L_n^x, \text{ 且 } x \notin L_1^x \cup \dots \cup L_n^x.$$

为描述方便, 如果用字母  $L$  表示一条直线, 那么字母  $L$  也表示一个一次多项式使得其零点集合为该直线. 如果点集  $X$  满足几何特征条件, 那么对每一个  $x_i \in X$  我们可构造次数为  $n$  的多项式

$$\ell_{x_i} := \frac{L_1^{x_i} \dots L_n^{x_i}}{L_1^{x_i}(x_i) \dots L_n^{x_i}(x_i)}.$$

容易看出

$$l_{x_i}(x_i) = 1, \quad l_{x_i}(x_j) = 0, \quad j \neq i.$$

依此, 对满足几何特征条件的点集, 我们可构造插值多项式为

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)l_{x_i}.$$

我们下面看一个几何特征点集的例子:

**例子 2.2 (直线简单相交网)** 在平面上任取  $n + 2$  条直线, 它们两两相交, 但任意三条均不交于一点. 这样所得的交点的集合称为直线简单相交网. 容易证明, 简单直线网即满足  $n$  阶几何特征条件.

**例子 2.3 (三角形网)** 对于平面上任给的三角形, 我们将其三边均  $n$  等分. 过每条边上的等分点, 分别作另两边的平行线. 依此, 我们即得到该三角形的一个三角剖分. 那么, 该三角剖分的顶点所组成的点集即满足  $n$  阶几何特征条件.

对于几何特征条件, 其中最吸引人的问题为 1982 年提出的如下猜想:

**猜想 2.1** 满足  $n$  阶几何特征条件的点集中, 必然有  $n + 1$  个点位于同一条直线上.

当前, 人们只能证明  $n \leq 4$  时猜想成立(参考[6]).

## 第三章 多项式最佳逼近

假定  $\mathcal{H}$  是  $C[a, b]$  中的一个线性子空间, 对任给的  $f \in C[a, b]$ , 我们寻找一  $p^* \in \mathcal{H}$  使得  $p^*$  是  $\mathcal{H}$  中对  $f$  的最佳逼近. 我们通常选择  $\mathcal{H}$  为次数不超过  $n$  的多项式空间, 记为  $\Pi_n$ . 当然, 这一“最佳”也依赖于我们所选的度量方式——范数. 我们可更精确的将该问题描述为: 对于给定的函数  $f \in C[a, b]$  和范数  $X$ , 寻找一 次数不超过  $n$  的多项式  $p^*$ , 使得  $p^*$  是在范数  $X$  意义下对  $f$  的最佳逼近, 即:

$$\|p^* - f\|_X = \min_{p \in \Pi_n} \|p - f\|_X.$$

当然, 选择不同的范数将导致最终结果不同. 我们在此考虑三种不同的范数.

### 3.1 $L_\infty$ 范数

如果我们选择范数  $X$  为  $L_\infty$  范数, 那么我们事实上是求解如下问题:

$$\inf_{p \in \Pi_n} \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|.$$

我们将上述问题的解记为  $p^*$ , 并令

$$e(x) := p^*(x) - f(x),$$

及

$$\mathcal{A} := \{x \in [a, b] : |f(x) - p^*(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |e(x)|\}.$$

那么, 下面的 Kolmogorov 最佳逼近定理给了一个  $p^*$  的刻画:

**定理 3.1** 多项式  $p^* \in \Pi_n$  是函数  $f \in C[a, b]$  在  $\Pi_n$  中的最佳逼近多项式, 必须且只须

$$\max_{x \in \mathcal{A}} (f(x) - p^*(x)) \cdot q(x) \geq 0, \quad \forall q \in \Pi_n.$$

证明: 我们首先假定

$$\max_{x \in \mathcal{A}} (f(x) - p^*(x)) \cdot q(x) \geq 0, \quad \forall q \in \Pi_n.$$

对任意  $p \in \Pi_n$ , 我们令  $q(x) := p^*(x) - p(x)$ . 假定对于  $x_0 \in \mathcal{A}$ ,

$$(f(x_0) - p^*(x_0)) \cdot q(x_0) \geq 0.$$

我们考虑

$$\begin{aligned} \|f - p\|_\infty^2 &\geq (f(x_0) - p(x_0))^2 = (f(x_0) - p^*(x_0) + q(x_0))^2 \\ &= (f(x_0) - p^*(x_0))^2 + 2q(x_0)(f(x_0) - p^*(x_0)) + q(x_0)^2 \\ &\geq (f(x_0) - p^*(x_0))^2 = \|f - p^*\|_\infty^2. \end{aligned}$$

因而,  $p^*$  是对  $f \in C[a, b]$  的最佳逼近.

现在我们假定  $p^*$  是  $\Pi_n$  中对  $f \in C[a, b]$  的最佳逼近. 如果我们所证的结论不成立, 也就是说, 对任意的  $x \in \mathcal{A}$ ,

$$(f(x) - p^*(x))q(x) < 0.$$

那么我们可以选择充分小的  $t > 0$ , 使得

$$\|f(x) - p^*(x) + tq(x)\|_\infty < \|f - p^*\|_\infty.$$

这与  $p^*$  是  $\Pi_n$  中对  $f \in C[a, b]$  的最佳逼近矛盾.

证毕.

下面的 Chebyshev 定理给出了更为具体的刻画:

**定理 3.2** 函数  $f \in C[a, b]$  在  $\Pi_n$  中的最佳逼近多项式是存在且唯一的. 多项式  $p^* \in \Pi_n$  是  $f$  的最佳逼近多项式必须且只须存在  $n+2$  个点

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leq b$$

使得

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \|f - p^*\|, \text{ 或者 } f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^{i+1} \|f - p^*\|.$$

也就是说  $f - p$  在至少  $n+2$  个点上正负交错的达到最大值.

**例子 3.1** 假设  $f \in C^2[a, b]$ , 且  $f''(x) > 0, a \leq x \leq b$ . 求  $f$  于  $\Pi_1$  中的最佳逼近多项式.

假定  $p_n(x) \in \Pi_n$  的首项系数为 1, 也就是说  $p_n$  可写为如下形式:

$$p_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0.$$

那么, 我们希望寻找  $c_{n-1}, \dots, c_0$  以使得

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} p_n(x)$$

达到最小. 此种多项式被称为最小零偏差多项式. 最小零偏差多项式实际上是寻求函数  $f(x) = x^n$  的  $n-1$  次最佳逼近多项式.

作为 Chebyshev 定理的一个应用, 我们可以证明 Chebyshev 多项式在区间  $[-1, 1]$  为最小零偏差多项式. 回忆 Chebyshev 多项式定义为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

我们首先介绍  $T_n$  的若干性质.

- 当  $n$  为奇数的时候,  $T_n$  为奇函数. 当  $n$  为偶数时,  $T_n$  为偶函数.
- $T_n$  满足如下的递归关系

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

- $T_n$  最高次项  $x^n$  的系数为  $2^{n-1}$ .
- 在点列  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, k = 0, \dots, n$  上,  $T_n$  正负交错的达到最大值 1.

**定理 3.3** 假定  $x \in [-1, 1]$  且令  $n$  为任意正整数. 那么对任意的首项为  $x^n$  的多项式  $p \in \Pi_n$ , 我们有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} p(x).$$

**例子 3.2** 用 6 次多项式在区间  $[-1, 1]$  上逼近  $\cos x$ . 如果用 Taylor 展开, 那么可选择

$$q_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

其逼近误差约为  $\frac{1}{8!} = 0.000025$ . 但如果我们用  $\cos x$  的 Taylor 展开的 8 次多项式, 但同时用最佳逼近方法将  $x^8$  替换为 6 次多项式. 那么, 我们得到一个新的 6 次多项式  $q'_6$ . 其对  $\cos x$  的逼近误差为  $\frac{1}{10!} + \frac{1}{2^6 \cdot 8!} < 0.00000047$ .

### 3.2 $L^1$ 范数

如果我们选取  $X$  为  $L^1$  范数, 那么我们事实上是考虑如下问题:

$$\inf_{p \in \Pi_n} \int_a^b |f(x) - p(x)| dx.$$

$L^1$  最佳逼近亦是逼近论中的经典内容, 但过去对其重视不足. 近些年, 随着稀疏逼近, 特别是压缩感知的兴起, 人们从而对  $L^1$  最佳逼近有了更多的新认识.

我们假定  $p^* \in \Pi_n$  是对  $f$  的最佳  $L^1$  逼近. 我们定义如下的符号函数:

$$s^*(x) = \begin{cases} -1, & f(x) < p^*(x) \\ 0, & f(x) = p^*(x), \\ 1, & f(x) > p^*(x) \end{cases} \quad a \leq x \leq b.$$

下面的定理刻画了  $L^1$  最佳逼近多项式的特征.

**定理 3.4** 令  $f \in C[a, b]$ . 令  $f \in \Pi_n$  且使得集合

$$\mathcal{E} := \{x : f(x) = p^*(x), a \leq x \leq b\}$$

为空或者由有限个点或区间组成. 那么  $p^*$  是  $\Pi_n$  中  $f$  的最佳  $L^1$  逼近, 如果和仅仅如果不等式

$$\left| \int_a^b s^*(x)p(x) dx \right| \leq \int_{\mathcal{E}} |p(x)| dx$$

对所有  $p \in \Pi_n$  均成立.

很多情况下, 集合  $\mathcal{E}$  是一个离散集合, 因而  $\int_{\mathcal{E}} |p(x)| dx = 0$ . 那么,  $p^*$  是对  $f$  的  $L^1$  最佳逼近, 如果和仅仅如果

$$\int_a^b s^*(x)p(x) dx = 0, \quad \forall p \in \Pi_n.$$

根据该定理, 我们很容易得到, 单调函数  $f$  在  $\Pi_0$  中的最佳逼近为  $p^*(x) = f((a+b)/2)$ .

在实际中, 特别是信号处理中, 人们可能仅仅知道函数  $f$  在一些离散点上的值. 因此, 人们需要考虑离散情形的  $\ell^1$  最佳逼近. 我们在此考虑加权  $\ell^1$  范数: 即对向量  $f \in \mathbb{R}^m$ , 和向量  $w = (w_1, \dots, w_m), w_i > 0$ , 那么

$$\|f\|_{w,1} := \sum_{i=1}^m w_i |f_i|.$$

所谓离散  $\ell^1$  最佳逼近, 即指对一线性子空间  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^m$ , 寻找  $p^* \in \mathcal{H}$  使得

$$\|p^* - f\|_{w,1} = \min_{p \in \mathcal{H}} \|p - f\|_{w,1}.$$

我们将导出离散  $\ell^1$  最佳逼近的特征. 对于  $p^* \in \mathcal{H}$ , 我们定义符号向量:

$$s^*(t) = \begin{cases} -1, & f(t) < p^*(t) \\ 0, & f(t) = p^*(t) \\ 1, & f(t) > p^*(t), \end{cases} \quad t = 1, \dots, m.$$

**定理 3.5** 向量  $p^* \in \mathcal{H}$  是  $f \in \mathbb{R}^m$  的  $\ell^1$  最佳逼近如果和仅仅如果下述不等式对所有  $p \in \mathcal{H}$  均成立:

$$\left| \sum_{t=1}^m w(t) s^*(t) p(t) \right| \leq \sum_{t \in \mathcal{Z}} w(t) |p(t)|,$$

此处

$$\mathcal{Z} := \{t : p^*(t) = f(t), 1 \leq t \leq m\}.$$

更进一步, 我们有

**定理 3.6** 假定  $\dim \mathcal{H} = n$ . 假定向量  $p^* \in \mathcal{H}$  是  $f \in \mathbb{R}^m$  的唯一  $\ell^1$  最佳逼近, 并令

$$\mathcal{Z} := \{t : p^*(t) = f(t), 1 \leq t \leq m\}.$$

那么,

$$\#\mathcal{Z} \geq n.$$

我们下面简单介绍离散最佳  $\ell^1$  逼近与压缩感知之间的关联. 假定信号  $f \in \mathbb{R}^m$  是一稀疏信号, 即其非零元素很少. 我们将  $f$  中非零元素数目记为  $k$ , 且  $k \ll m$ . 那么,  $\mathcal{H}$  中对  $f$  的  $\ell^1$  最佳逼近是  $\mathcal{H}$  中的 0 元素的一个充分条件是: 对任意的  $T \subset \{1, \dots, m\}$  且  $\#T \leq m - k$ , 我们有

$$\sum_{t \notin T} w(t) |p(t)| \leq \sum_{t \in T} w(t) |p(t)|, \quad (3.1)$$

对任意的  $p \in \mathcal{H}$  均成立. 条件 (3.1) 也被称为**零空间性质**. 实际中, 人们通常选择  $\mathcal{H}$  为一线性方程组的零解空间, 即存在一  $s \times m$  的矩阵  $A$  使得

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}.$$

那么, 一个自然的问题是: 矩阵  $A$  满足什么样的条件才能保证  $\mathcal{H}$  满足零空间性质呢? 为此, 人们引入了 RIP 条件. 我们称矩阵满足  $k$  阶 RIP 条件, 即对任意的  $T \subset \{1, \dots, m\}$  且  $\#T \leq k$  存在常数  $\delta$  使得:

$$(1 - \delta)\|x_T\|^2 \leq \|\Phi_T x_T\|^2 \leq (1 + \delta)\|x_T\|^2$$

成立.

我们下面看一下零空间性质与稀疏恢复之间的关联. 假定  $f \in \mathbb{R}^m$  中非零元素数目为  $k$ . 我们选择一观测矩阵  $A \in \mathbb{R}^{s \times m}$ , 使其 0 解空间  $\{x : Ax = 0\}$  满足零空间性质. 我们现在考虑如下问题的解:

$$\begin{aligned} P_0 : \quad & \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|f - x\|_1 \\ & \text{s.t.} \quad Ax = 0. \end{aligned}$$

也就是在空间  $\mathcal{H} = \{x : Ax = 0\}$  中寻找对  $f$  的最佳  $\ell_1$  逼近. 因为  $\mathcal{H}$  满足零空间性质, 上述问题  $P_0$  的解应为 0. 如果我们令  $t = f - x$ . 那么, 上述问题可描述为

$$\begin{aligned} P_1 : \quad & \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|t\|_1 \\ & \text{s.t.} \quad At = Af. \end{aligned}$$

$P_0$  的解为 0 则意味着  $P_1$  的解为  $f$ . 在实际中, 我们可将  $Af$  考虑为对信号  $f$  的观测. 注意到这里的  $A$  是一个“扁”的矩阵. 那么, 这个结论意味着, 即便我们只对  $f$  进行部分观测, 我们可通过求解  $P_1$  精确得到  $f$ . 当然, 这里的观测矩阵  $A$  需要精心设计, 以使得空间  $\mathcal{H} = \{x : Ax = 0\}$  性质. 一般而言, 我们只需要寻找满足 RIP 条件的矩阵即可.

关于 RIP 条件与零空间性质是当前压缩感知中的一个热门研究领域. 这方面的更多介绍可参考 [7, 8].

### 3.3 $L^2$ 范数

设  $\rho$  是一个在区间  $[a, b]$  上  $L$  可积的非负函数, 它至多只在一个测度为 0 的集合上可能等于 0. 我们称  $\rho$  为一个权函数. 对于任意一个定义在区间  $[a, b]$  上的可测函数  $f$ , 如果  $\rho \cdot f$  是  $L$  可积的, 则说  $f$  属于  $L_\rho[a, b]$  类, 如果  $\rho \cdot f^2$  是  $L$  可积的, 则说  $f$  属于  $L_\rho^2[a, b]$  类.  $L_\rho^2[a, b]$  中的每一个函数  $f$ , 其范数定义为

$$\|f\|_{\rho, 2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx}.$$



那么,  $\|f - g\|_{\rho,2}$  给出两个函数  $f, g$  之间的距离. 所谓  $L^2$  最佳逼近就是对任意的函数  $f \in C[a, b]$  寻找一函数  $p \in \Pi_n$  使得

$$\|f - p\|_{\rho,2}$$

达到最小.

设  $\rho$  为定义在区间  $[a, b]$  上的权函数. 如果函数  $f$  与  $g$  满足条件:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx = 0$$

则说  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho$  是直交的. 如果函数系统

$$\omega_1, \omega_2, \dots$$

中的每一对函数在区间  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho$  均直角, 则称该系统为  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho$  的直交函数系. 我们看几个例子:

例 Legendre 多项式系

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

是区间  $[-1, 1]$  上的直交多项式.

例 Chebyshev 多项式系

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

是区间  $[-1, 1]$  上对权函数  $(1 - x^2)^{-1/2}$  的直交系.

下面我们介绍广义 Fourier 展开的问题. 设置

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\omega_k^2(x)dx.$$

和

$$c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b \rho(x)\omega_k(x)f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

从而有如下的广义 Fourier 级数:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x)$$

定理 3.7 对于任意给定的正整数  $n$ , 用线性组合式

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x)$$

做成的函数对  $f$  进行平方逼近, 为使偏差

$$\|F - f\|_{\rho,2} = \left( \int_a^b \rho(x)(F(x) - f(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

达到最小  $F$  必须等于广义 Fourier 级数的部分和  $S_n(x) := \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x)$ . 而偏差最小值等于

$$\left( \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \right)^{1/2}.$$

注意到  $\|S_n - f\| \geq 0$ . 因此, 可有

$$\sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx.$$

令  $n \rightarrow \infty$  有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx,$$

这就是 Bessel 不等式. 根据偏差的最小值表达式可知, 上述 Bessel 不等式能改为 Parseval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\|_{\rho,2} = 0.$$

我们简要介绍三种最常用的直交多项式, 它们是 Legendre 多项式系  $\{p_n\}$ , Laguerre 多项式系  $\{L_n\}$  和 Hermite 多项式系  $\{H_n\}$ . 它们在数学物理问题及数值积分中均有重要意义.

### 1. Legendre 多项式系

在区间  $[-1, 1]$  上对于权函数  $\rho = 1$  构成的直交系的多项式  $p_n$  称为 Legendre 多项式系, 其简单表达形式为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

$p_n(x)$  实际上是下列 Legendre 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

在正规点  $x = 0$  附近满足条件  $y(1) = 1$  的唯一确定的多项式解.  $p_n(x)$  有如下的母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) z^n, \quad |z| < 1.$$

## 2. Laguerre 多项式系

以前我们所讨论的一切, 都是假定基本区间  $[a, b]$  是有限的. 其实, 权函数、 $L^2_\rho$  空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形. 所谓的 Laguerre 多项式系  $\{L_n\}$ , 就是在区间  $(0, +\infty)$  上关于权函数  $e^{-x}$  所构成的直交系. 它们可以表达为:

$$L_n(x) = e^x \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}).$$

只要将上式右端的导数算出, 就知道  $L_n$  是  $n$  次多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}.$$

## 3. Hermite 多项式系

所谓 Hermite 多项式  $\{H_n\}$  就是在区间  $(-\infty, \infty)$  上关于权函数  $e^{-x^2}$  所构成的直交系. 它可以通过如下的表达式来定义:

$$H_n(x) = e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x^2}).$$



## 第四章 Padé 逼近

Taylor级数是遍及许多物理和生物学中数学模型的实际计算基础. 通常, 我们可用Taylor级数对函数值进行近似. 但是, 这种功能是有其一定限度的. 本节我们介绍由Taylor展开式所定义的函数 $f$ 的一种重要的分式逼近方法——Padé逼近方法. 直观上看, Padé逼近更深入的挖掘了函数的Taylor级数所蕴含的信息. 因此, 可以提供更好的逼近.

### 4.1 基本理论

设 $f$ 由下述形式幂级数所定义:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j.$$

则 $f$ 的 $[L/M]$  Padé逼近为

$$[L/M] = P_L/Q_M$$

其中 $P_L$ 和 $Q_M$ 分别为次数不超过 $L$ 和 $M$ 的多项式, 且按照下述方程来确定

$$f(x) - P_L(x)/Q_M(x) = O(x^{L+M+1}).$$

此外, 我们要求 $Q_M$ 满足标准化条件

$$Q_M(0) = 1,$$

我们也要求 $P_L$ 和 $Q_M$ 无公因子.

我们假定 $P_L$ 与 $Q_M$ 可写为如下形式:

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1x + \cdots + p_Lx^L \\ Q_M(x) &= 1 + q_1x + \cdots + q_Mx^M. \end{aligned}$$

因此, 我们可有

$$(1 + q_1x + \cdots + q_Mx^M)(c_0 + c_1x + \cdots) = p_0 + p_1x + \cdots + p_Lx^L + O(x^{L+M+1}).$$

那么, 我们可得如下线性方程组

$$\begin{aligned} c_0 &= p_0, \\ c_1 + c_0q_1 &= p_1, \\ c_2 + c_1q_1 + c_0q_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ c_L + c_{L-1}q_1 + \cdots + c_0q_L &= p_L, \\ c_{L+1} + c_Lq_1 + \cdots + c_{L-M+1}q_M &= 0, \\ &\vdots \\ c_{L+M} + c_{L+M-1}q_1 + \cdots + c_Lq_M &= 0. \end{aligned}$$

求解如上线性方程组我们即得到所需之Padé逼近. 我们通过如下例子观察Padé逼近的效果:

**例子 4.1** 我们考察函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots.$$

通过计算可知,  $f$ 的 $[1/1]$ Padé逼近为

$$\frac{1 + x/4}{1 + 3x/4}.$$

从以下图像的观察可看出, Padé逼近明显优于同阶的Taylor级数.

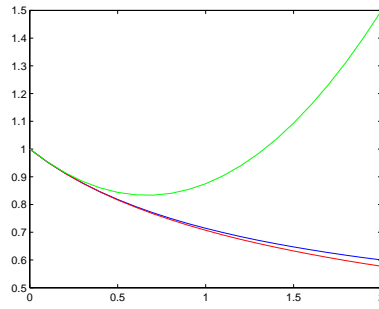
图1: 函数 $1/\sqrt{1+x}$ 图像 (红),  $[1/1]$ Padé逼近图像 (蓝) 及2阶Taylor级数图像 (绿)

自然地, 人们不禁要问: 对任给的正整数 $L$ 和 $M$ ,  $[L/M]$ Padé逼近一定存在吗? 我们考虑如下的例子: 假定

$$f(x) = 1 + x^2 + \cdots$$

考虑函数 $f$ 的 $[1/1]$ Padé逼近. 也就是说, 我们希望寻找 $p_0, p_1, q_0, q_1$ 使得

$$\frac{p_0 + p_1x}{q_0 + q_1x} = 1 + x^2 + O(x^3).$$



也就是

$$p_0 + p_1x = q_0 + q_1x + q_0x^2 + O(x^3).$$

因此

$$p_0 = q_0, p_1 = q_1, q_0 = 0.$$

由此, 我们得到的逼近是

$$\frac{0 + q_1x}{0 + q_1x} = 1.$$

但是,  $1 \neq 1 + x^2 + O(x^3)$ . 也就是,  $f$  的  $[1/1]$  Padé 逼近不存在. 那么, 更进一步, 如果 Padé 逼近, 一定唯一吗? 下述定理表明, Padé 逼近若存在, 则唯一.

**定理 4.1** (Frobenius-Padé) 对于任意形式幂级数  $f$ , 若其  $[L/M]$  Padé 逼近存在, 则必唯一.

如果  $[L/M]$  Padé 逼近存在, Jacobi 给出了一个行列式的表达方式:

**定理 4.2** 如果  $[L/M]$  Padé 逼近存在, 则

$$[L/M] = \frac{\det \begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L c_{j-M}x^j & \sum_{j=M-1}^L c_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum_{j=0}^L c_jx^j \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}.$$

例子：计算

$$f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

的Padé逼近表.

对于有理函数的Padé逼近, 我们有

**定理 4.3** 若函数 $f_0$ 具有形式

$$\frac{\sum_{t=0}^l c_t x^t}{1 + \sum_{u=1}^m e_u x^u}$$

必须且只需它的Padé逼近为

$$[L/M] = f_0$$

只要 $L \geq l, M \geq m$ .

对于Padé逼近的存在性问题, 1973年Baker证明了如下结果:

**定理 4.4** 对给定任一形式幂级数, 下面事实成立:

1. 对任意固定 $M$ , 均存在 $L_j$ 的一个无穷序列, 使得 $[L_j/M]$ 存在;
2. 对任一固定 $L$ , 均存在 $M_j$ 的一个无穷序列, 使得 $[L/M_j]$ 存在;
3. 对任一固定 $J$ , 均存在一个无穷序列 $M_j$ , 使得 $[M_j + J/M_j]$ 存在.

## 4.2 $\varepsilon$ -算法

$\varepsilon$ -算法是Shanks-Wynn所提出. 其基本思想如下: 假定我们已知序列

$$\varepsilon_0^{(0)}, \varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}, \dots,$$

而且我们令

$$\varepsilon_{-1}^{(j)} = 0, j = 0, 1, \dots$$

那么, 我们通过如下运算

$$\varepsilon_{k+1}^{(j)} = \varepsilon_{k-1}^{(j+1)} + (\varepsilon_k^{(j+1)} - \varepsilon_k^{(j)})^{-1} \quad (4.1)$$



即可到一系列新序列.  $\varepsilon$ -算法可通过如下的 $\varepsilon$ -阵更清晰的表现出来

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \varepsilon_{-1}^{(0)} \\ & & & & & & \varepsilon_0^{(0)} \\ & & & & & & \varepsilon_{-1}^{(1)} & & \varepsilon_1^{(0)} \\ & & & & & & \varepsilon_0^{(1)} & & \varepsilon_2^{(0)} \\ & & & & & & \varepsilon_{-1}^{(2)} & & \varepsilon_1^{(1)} & & \vdots \\ & & & & & & \varepsilon_0^{(2)} & & \vdots \\ & & & & & & \varepsilon_{-1}^{(3)} & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

而且运算规则(4.1)则涉及到 $\varepsilon$ -阵中如下菱形排列的元素:

$$\begin{array}{ccc} & & \varepsilon_k^{(j)} \\ \varepsilon_{k-1}^{(j+1)} & & \varepsilon_{k+1}^{(j)} \\ & & \varepsilon_k^{(j+1)} \end{array} .$$

$\varepsilon$ -算法出发点是通过原始序列

$$\varepsilon_0^{(\cdot)}$$

进行改造, 从而得到一系列新序列

$$\varepsilon_1^{(\cdot)}, \varepsilon_2^{(\cdot)}, \dots$$

这些新序列, 如 $\varepsilon_1^{(\cdot)}$ , 通常具有比原始序列 $\varepsilon_0^{(\cdot)}$ 更快的收敛速度. 我们下面简单介绍 $\varepsilon$ 算法与Padé逼近的关系.

如果我们选取 $\varepsilon_0^{(j)}$ 为函数

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

的前 $j+1$ 项部分和在 $x = x_0$ 点处的值:

$$\varepsilon_0^{(j)} = \sum_{i=0}^j c_i x_0^i.$$

那么,  $\varepsilon_{2k}^{(j)}$ 就是 $f$ 的 $[(k+j)/k]$ Padé逼近在 $x = x_0$ 点处的值. 由此,  $\varepsilon$ -算法也提供了一种快速计算 $[(k+j)/k]$ Padé逼近在一点处函数值的方法.



## 第五章 平方逼近

### 5.1 定义

设 $\rho$ 是一个在区间 $[a, b]$ 上 $L$ 可积的非负函数, 它至多只在一个测度为0的集合上可能等于0. 我们称 $\rho$ 为一个权函数. 对于任意一个定义在区间 $[a, b]$ 上的可测函数 $f$ , 如果 $\rho \cdot f$ 是 $L$ 可积的, 则说 $f$ 属于 $L_\rho[a, b]$ 类, 如果 $\rho \cdot f^2$ 是 $L$ 可积的, 则说 $f$ 属于 $L_\rho^2[a, b]$ 类.  $L_\rho^2[a, b]$ 中的每一个函数 $f$ , 其范数定义为

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx}.$$

那么,  $\|f - g\|$ 给出两个函数 $f, g$ 之间的距离. 所谓平方逼近就是按照这种度量来衡量逼近程度.

### 5.2 直交函数系与广义Fourier级数

设 $\rho$ 为定义在区间 $[a, b]$ 上的权函数. 如果函数 $f$ 与 $g$ 满足条件:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则说 $f$ 和 $g$ 在 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho$ 是直交的. 如果函数系统

$$\omega_1, \omega_2, \dots$$

中的每一对函数在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho$ 均直交, 则称该系统为 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho$ 的直交函数系. 我们看几个例子:

例 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

是定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的直交函数系.

例 Legendre多项式

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

是区间 $[-1, 1]$ 上的直交多项式.

例 Tchebyshev多项式系

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

是区间 $[-1, 1]$ 上对权函数 $(1 - x^2)^{-1/2}$ 的直交系.

例 考虑Sturm-Liouville微分方程边值问题:

$$y'' + \lambda \rho(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

此处,  $\rho$ 就是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数,  $\lambda$ 为数值参数. 凡不恒等于0的解均称为基本函数, 而对应的 $\lambda$ 成为特征值. 对于每一个特征值, 都只有一个基本函数. 特征值可以由小到大排列起来, 而对应的基本函数也可以排成一列, 例如:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

可以证明, 上列的基本函数系在闭区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho$ 正交.

下面我们介绍广义Fourier展开的问题. 设置

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \omega_k^2(x) dx.$$

和

$$c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b \rho(x) \omega_k(x) f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

从而有如下的广义Fourier级数:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x)$$

**定理 5.1** 对于任意给定的正整数 $n$ , 用线性组合式

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x)$$

做成的函数对 $f$ 进行平方逼近, 为使偏差

$$\|F - f\| = \left( \int_a^b \rho(x)(F(x) - f(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

达到最小 $F$ 必须等于广义Fourier级数的部分和 $S_n(x) := \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x)$ . 而偏差最小值等于

$$\|S_n - f\| = \left( \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \right)^{1/2}.$$

注意到 $\|S_n - f\| \geq 0$ , 因此, 可有

$$\sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx,$$

这就是Bessel不等式. 根据偏差的最小值表达式可知, 上述Bessel不等式能改为Parseval等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\| = 0.$$

那么, 我们现在看另外一个问题, 在什么条件下, 给定的数列 $\{c_k\}$ 能够作为 $L^2_\rho$ 中某一函数 $f$ 的Fourier系数, 并且由其生成的Fourier级数平均收敛于 $f$ 呢? 对这个问题的回答有如下定理:

**定理 5.2** 设 $\omega_k$ 在闭区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho$ 作为直交系. 如果数列 $c_k$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty$$

则 $L^2_\rho[a, b]$ 中存在唯一的函数 $f$ 使得 $f$ 的Fourier系数恰好是 $c_k$ 且 $\sum_{k=1}^n c_k \omega_k$ 平均收敛于 $f$ .

若一个直角函数系 $\{\omega_k\}$ 对于 $L_\rho^2$ 中的每一函数Parseval等式成立, 则称它为封闭的直交函数系. 若 $\{\omega_k\}$ 为封闭的直交函数系, 而 $f, g$ 为 $L_\rho^2$ 中的任意两个函数, 它们的Fourier级数分别为 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ , 则下列广义Parseval等式成立

$$\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \beta_k.$$

给一个直角系 $\{\omega_k\}$ , 如果 $L_\rho^2[a, b]$ 中再没有一个函数与一切 $\omega_k$ 直交, 那么 $\{\omega_k\}$ 称为完备的直交系.

直交系的完备性与封闭性等价.

作为简单的总结, 我们知道下面的概念都是彼此等价的:

1.  $\{\omega_k\}$ 是完备直交系;
2.  $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系;
3. Parseval等式对每个 $f \in L_\rho^2$ 成立;
4.  $L_\rho^2$ 中每个 $f$ 的Fourier级数都平均收敛;
5. 只有处处取0值得函数才能同所有 $\omega_k$ 正交;
6. 当两个函数有相同Fourier级数时, 它们必定几乎处处相等;
7. 对 $L_\rho^2$ 中的每个 $f$ 用 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的线性组合来作平方逼近时, 偏差的最小值与 $1/n$ 同时趋于0.
8. 由 $\{\omega_k\}$ 中的函数一切线性组合构成的类是在 $L_\rho^2$ 中稠密.

### 5.3 几种特殊的直交多项式

我们简要介绍三种最常用的直交多项式, 它们是Legendre多项式系 $\{p_n\}$ , Laguerre多项式系 $\{L_n\}$ 和Hermite多项式系 $\{H_n\}$ . 它们在数学物理问题及数值积分中均有重要意义.

#### 1. Legendre多项式系

在区间 $[-1, 1]$ 上对于权函数 $\rho = 1$ 构成的直交系的多项式 $p_n$ 称为Legendre多项式系, 其简单表达形式为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n.$$

$p_n(x)$ 实际上是下列Legendre微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

在正规点  $x = 0$  附近满足条件  $y(1) = 1$  的唯一确定的多项式解.  $p_n(x)$  有如下的母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) z^n, \quad |z| < 1.$$

### 2. Laguerre 多项式

以前我们所讨论的一切, 都是假定基本区间  $[a, b]$  是有限的. 其实, 权函数、 $L^2$  空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形. 所谓的 Laguerre 多项式系  $\{L_n\}$ , 就是在区间  $(0, +\infty)$  上关于权函数  $e^{-x}$  所构成的直交系. 它们可以表达为:

$$L_n(x) = e^x \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}).$$

只要将上式右端的导数算出, 就知道  $L_n$  是  $n$  次多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}.$$

### 3. Hermite 多项式

所谓的 Hermite 多项式  $\{H_n\}$  就是在区间  $(-\infty, \infty)$  上关于权函数  $e^{-x^2}$  所构成的直交系. 它可以通过如下的表达式来定义:

$$H_n(x) = e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x^2}).$$





## 第六章 样条函数

### 6.1 样条函数

设给定一组结点

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = \infty \quad (6.1)$$

我们设 $S$ 为满足下面条件的分段函数:

1. 在每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 0, \dots, N$ 上,  $S$ 是一个次数不超过 $n$ 的多项式;
2.  $S$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有直到 $n - 1$ 阶的导数.

我们称 $S$ 为 $n$ 次样条函数. 我们把以(6.1)为结点的 $n$ 次样条函数空间的总体记为 $S_n(x_1, \dots, x_N)$ . 自然, 我们关心 $S_n(x_1, \dots, x_N)$ 的维数与基底.

**定理 6.1**  $\dim S_n(x_1, \dots, x_N) = n + N + 1$ . 函数序列

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n\}$$

构成 $S_n(x_1, \dots, x_N)$ 的一组基底.

假定我们用 $n$ 次样条函数在点 $x_1, \dots, x_N$ 插值函数 $f$ , 即寻找一 $s \in S_n(x_1, \dots, x_N)$ 使得

$$s(x_j) = f(x_j), j = 1, \dots, N.$$

因为 $\dim S_n(x_1, \dots, x_N) > N$ , 这个问题的解并不唯一. 为保证唯一性, 我们通常加一些附加条件. 一种方法就是引入自然样条函数的概念. 一个 $2n - 1$ 次样条函数 $S \in S_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$ , 如果在区间 $(-\infty, x_1)$ 与 $(x_N, \infty)$ 上都是 $n - 1$ 次多项式, 则称之为 $2n - 1$ 次自然样条函数. 以(6.1)为结点的 $2n - 1$ 次自然样条函数总体记为 $N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$ . 那么

**定理 6.2** 为使  $S \in N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$  必须且只需存在次数为  $n-1$  的多项式  $p_{n-1}$  和实数  $c_1, \dots, c_N$  使得

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1},$$

此处  $c_1, \dots, c_N$  满足条件

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^k = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

由上述定理看出  $\dim N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N) = N$ . 那么, 我们有如下插值存在唯一性定理:

**定理 6.3** 设  $1 \leq n \leq N$ , 则对任意给定的  $y_1, \dots, y_N$  存在唯一的自然样条函数  $S \in N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$ , 使得

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

在所有插值于  $(x_j, y_j), j = 1, \dots, N$  的函数中, 自然样条函数具有最光滑特征. 下面定理是 Holladay 在 1957 年给出的:

**定理 6.4** 设  $1 \leq n \leq N$ , 且

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$$

又设  $S \in N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$  是满足插值条件

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N$$

的自然样条函数, 则对任何满足上述条件的函数  $f \in C^n[a, b]$ :

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N$$

必有

$$\int_a^b (S^{(n)}(x))^2 dx \leq \int_a^b (f^{(n)}(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当  $f \equiv S$ .

## 6.2 B-样条函数

B-样条函数在理论和应用中均扮演重要角色. 即使从纯粹数学角度看, B-样条函数也有其自身的魅力. B-样条函数的定义有多种, 我们将主要介绍几种.

### 6.2.1 截断幂插商

定义向后插分为

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1), \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} \Delta f(x).$$

那么,  $m$ 阶( $m-1$ 次)B-样条定义为:

$$B_m(x) := \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1}.$$

根据上述定义, 我们可将  $B_m$  表示如下:

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1}.$$

### 6.2.2 卷积观点

令

$$B_1(x) = 1, \quad 0 \leq x < 1, \quad B_1(x) = 0, \quad x < 0, x \geq 1.$$

那么, 我们可归纳定义

$$B_m = B_{m-1} * B_1,$$

即

$$B_m(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t) dt.$$

通过该定义, 我们可看到

$$\hat{B}_m(w) = \left( \frac{1 - e^{-iw}}{iw} \right)^m$$

### 6.2.3 B-样条函数性质

在这一节里, 我们假设B-样条函数按照卷积的方式定义:

B-样条函数满足如下性质:

1. 对每个测试函数  $\varphi$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) B_m(x) dx = \int_{x \in [0,1]^m} \varphi(x_1 + \cdots + x_m) dx_1 \cdots dx_m.$$

2. 对每个函数  $g \in C^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x) B_m(x) dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k).$$

3.

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1}.$$

4.

$$\text{supp} B_m(x) = [0, m].$$

5.

$$B_m(x) > 0, \quad 0 < x < m.$$

6.

$$\sum_k B_m(x-k) = 1.$$

7.

$$B'_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1).$$

8.

$$B_m(x) = \frac{x}{m-1} B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} B_{m-1}(x-1).$$

9.  $B_m$ 关于中心对称.

# 第七章 非均匀样条函数

## 7.1 定义

现将我们考虑的样条函数限于一闭区间 $[a, b]$ 上, 并假定有如下结点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

我们仍然用 $S_k(x_0, \dots, x_n)$ 标记定义在结点 $x_1, \dots, x_n$ 上次数为 $k$ 的样条函数空间. 那么, 根据我们先前的分析,  $\dim S_k(x_0, \dots, x_n) = n + k$ . 我们试图寻找一个基底 $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots, k + n\}$ , 以至于 $\phi_j$ 在 $[a, b]$ 区间内大部分区域为0. 我们可将这个想法用数学语言描述为: 寻找 $S_k(x_0, \dots, x_n)$ 中的一个元素以使其在区间 $[x_0, x_p]$ 与 $[x_q, x_n]$ 上为0, 然而在 $[x_p, x_q]$ 上非0, 这里 $0 < p < q < n$ . 而且我们希望区间 $[x_p, x_q]$ 尽可能小. 我们将该元素记为 $s \in S_k(x_0, \dots, x_n)$ . 那么,  $s$ 能表示为如下形式:

$$s(x) = \sum_{j=p}^q d_j (x - x_j)_+^k, \quad a \leq x \leq b,$$

这里, 系数 $d_j$ 需满足

$$\sum_{j=p}^q d_j (x - x_j)^k = 0, \quad x_q \leq x \leq b.$$

由此, 我们得到如下方程组

$$\sum_{j=p}^q d_j x_j^i = 0, \quad i = 0, \dots, k.$$

当 $q \geq p + k + 1$ 时, 这个方程组存在非0解. 当 $q = p + k + 1$ 时, 我们可有

$$d_j = \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k+1} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad j = p, p + 1, \dots, p + k + 1.$$

那么, 我们最终得到的样条函数为

$$M_p(x) = \sum_{i=p}^{p+k+1} \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k+1} \frac{1}{x_i - x_j} (x - x_j)_+^k$$

我们称 $M_p$ 为非均匀B-样条函数. 这里的下标 $p$ 用来表示 $M_p$ 在区间 $(x_p, x_{p+k+1})$ 内部非0. 下面定理显示我们所得到的 $M_p$ 在 $[x_p, x_{p+k+1}]$ 内部无0点.

**定理 7.1** 假定 $s \in S_k(x_0, \dots, x_n)$ 在 $[x_0, x_p]$ 与 $[x_q, x_n]$ 上恒为0, 且在 $(x_p, x_q)$ 中有 $r$ 个0点, 这里 $r$ 是一个有限的数. 那么,

$$r \leq q - (p + k + 1).$$

我们可以得到一个函数集合 $\{M_0, \dots, M_{n-k-1}\}$ . 虽然所有这些函数均线性无关, 但其函数数目小于 $n + k = \dim S_k(x_0, \dots, x_n)$ . 因此, 我们需要加入 $2k$ 个函数, 以使其构成一基底. 在样条函数理论中, 一个常用的方法即是在区间 $[a, b]$ 之外引入新的结点. 我们可令 $\{x_j : j = -k, -k + 1, \dots, -1\}$  和 $\{x_j : j = n + 1, \dots, n + k\}$ 是满足如下条件的结点:

$$x_{-k} < x_{-k+1} < \dots < x_{-1} < x_0 = a; \quad b = x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+k}.$$

我们即可定义 $M_p$ ,  $p = -k, -k + 1, \dots, n - 1$ . 但是, 我们仅仅使用 $M_p(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的函数值. 一个简单的观察是, 对任意的 $p = -k, -k + 1, \dots, n - 1$ ,

$$M_p|_{[a,b]} \in S_k(x_0, \dots, x_n).$$

我们有如下定理:

**定理 7.2** 函数 $\{M_p|_{[a,b]} : -k \leq p \leq n - 1\}$ 是 $S_k(x_0, \dots, x_n)$ 的一组基底.

## 7.2 递归公式

为方便, 我们用 $M_p^k$ 表示 $k$ 次B-样条函数, 这里我们用上标 $k$ 表示次数, 亦即

$$M_p^k(x) = \sum_{i=p}^{p+k+1} \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k+1} \frac{1}{x_i - x_j} (x - x_j)_+^k$$

我们现在考虑函数

$$f(t) = (-1)^{k+1} (x - t)_+^k, \quad -\infty < t < \infty,$$

这里 $x$ 是任意固定的实数. 那么, 我们考虑函数 $f$ 的差分

$$f[x_p, \dots, x_{p+k+1}].$$

根据差分的定义, 我们可得

$$f[x_p, \dots, x_{p+k+1}] = \sum_{j=p}^{p+k+1} \frac{(-1)^{k+1} (x - x_j)_+^k}{\prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k+1} (x_j - x_i)} = M_p^k(x).$$

因此, 我们亦可将 $M_p^k$ 定义为截断函数的差分. 利用这一关联, 我们可容易的证明如下定理:

**定理 7.3** 当 $k > 1$ 时,

$$M_p^k(x) = \frac{(x - x_p)M_p^{k-1}(x) + (x_{p+k+1} - x)M_{p+1}^{k-1}(x)}{x_{p+k+1} - x_p}.$$

我们可令

$$g(t) = (t - x), \quad h(t) = (-1)^k (x - t)_+^{k-1},$$

并通过差分性质可得到

$$M_p^k(x) = \sum_{j=p}^{p+k+1} g[x_p, \dots, x_j] h[x_j, \dots, x_{p+k+1}].$$

依此即可证明该定理.

### 7.3 Schoenberg-Whitney定理

给定一个函数 $f$ , 我们希望寻找 $S_k(x_0, \dots, x_n)$ 中的一元素以使其插值于

$$f(\xi_j), \quad j = 1, \dots, n + k$$

这里

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+k} \leq b.$$

注意, 我们并不要求插值点与样条的结点一致. 注意到插值点数目与样条空间维数相同. 一个重要的问题是: 是否存在一个唯一的 $s \in S_k(x_0, \dots, x_n)$ 使得

$$s(\xi_j) = f(\xi_j), \quad j = 1, \dots, n + k.$$

对于多项式插值而言, 这个结果是平凡的. 对于样条函数, 相应的结果则有如下的Schoenberg-Whitney定理给出.

定理 7.4 对任意的函数值  $\{f(\xi_j) : j = 1, \dots, n+k\}$ , 方程组

$$\sum_{p=-k}^{n-1} c_p M_p^k(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 1, \dots, n+k$$

有唯一解  $c_{-k}, \dots, c_{n-1}$  当且仅当所有的  $\{M_{j-k-1}^k(\xi_j) : j = 1, \dots, n+k\}$  非 0.



# 第八章 框架(I)

## 8.1 定义

假定 $\mathbf{H}$ 是一个Hilbert空间,  $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ 是 $\mathbf{H}$ 中的一族元素. 那么, 对于 $f \in \mathbf{H}$ , 我们能通过 $\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \Gamma}$ 恢复 $f$ 吗? 为此, 我们需要引入框架的定义

**定义 8.1** 序列 $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个框架, 如果存在两个常数 $A > 0, B > 0$ 使得对任意的 $f \in \mathbf{H}$ 均有

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

当 $A = B$ , 该框架称为紧框架.

容易证明如下结论: 如果 $A = B = 1$ , 且 $\|\phi_n\| = 1$ , 那么 $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ 是一组正交基. 我们称算子

$$(Uf)[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

为框架算子. 我们将稍后证明, 上述的框架条件, 可保证 $U$ 在其像空间上可逆, 且逆有界. 我们下面看几个框架的例子.

例子:

1. 令 $e_1, e_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一组正交基. 我们考虑如下的三个向量:

$$\phi_1 = e_1, \phi_2 = -\frac{e_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2, \phi_3 = -\frac{e_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2.$$

2. 假定 $\mathbf{H}$ 是有限维的, 且 $\mathbf{H} = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ . 那么,  $\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个框架.

## 8.2 伪逆

假定我们知道框架系数 $Uf[n]$ , 我们通常用伪逆的方法重建 $f$ . 我们首先介绍如下符

号: 我们令

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \|x\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |x[n]|^2 < \infty\}$$

令

$$\mathbf{Im}(U) := \{Uf : f \in \mathbf{H}\}.$$

**命题 8.1** 假定  $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$  是一个框架, 且其元素线性相关. 那么  $\mathbf{Im}(U)$  真包含于  $\ell^2(\Gamma)$ . 且  $U$  有无限个左逆  $\bar{U}^{-1}$  满足

$$\bar{U}^{-1}Uf = f, \quad \forall f \in \mathbf{H}.$$

**证明:** 注意到

$$\|Uf\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

因此,  $\mathbf{Im}(U)$  包含于  $\ell^2(\Gamma)$ . 因为  $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$  线性相关, 存在一个非0向量  $x^* \in \ell^2(\Gamma)$  使得

$$\sum_{n \in \Gamma} x^*[n]\phi_n = 0.$$

容易看出,  $x^*$  正交于  $\mathbf{Im}(U)$ . 因此,  $\mathbf{Im}(U)$  真包含于  $\ell^2(\Gamma)$ .

根据框架算子的性质, 如果  $Uf = 0$ , 那么  $f = 0$ . 因此, 框架算子  $U$  是单射. 也就是说, 算子  $U$  在  $\mathbf{Im}(U)$  上是可逆的. 但是, 左逆算子  $\bar{U}^{-1}$  在  $\mathbf{Im}(U)^\perp$  上可任意定义. 因此, 左逆算子可有无数个. 证毕.

那么, 在这么多左逆中, 我们最关心哪个呢? 我们现在考虑  $\mathbf{Im}(U)$  在  $\ell^2(\Gamma)$  中的正交补, 我们将其标记为  $\mathbf{Im}(U)^\perp$ . 那么, 伪逆  $\tilde{U}^{-1}$  就是将  $\mathbf{Im}(U)^\perp$  中的元素映为0的左逆. 下面的定理表明, 在所有的左逆中, 伪逆的算子范数最小. 为此, 我们定义伴随算子. 我们将  $U$  的伴随算子记为  $U^*$ , 即有  $\langle Uf, x \rangle = \langle f, U^*x \rangle$ . 注意到对任意  $x \in \ell^2(\Gamma)$  和  $f \in \mathbf{H}$ , 我们有

$$\langle U^*x, f \rangle = \langle x, Uf \rangle = \sum_{n \in \Gamma} x[n] \overline{\langle f, \phi_n \rangle} = \sum_{n \in \Gamma} x[n] \langle \phi_n, f \rangle.$$

因此, 我们有

$$U^*x = \sum_{n \in \Gamma} x[n]\phi_n.$$

伴随算子对我们理解伪逆有很重要的帮助:

**定理 8.1** 伪逆满足

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*.$$

在所有左逆中, 伪逆范数最小. 如果  $U$  为框架界为  $A, B$  的框架算子, 那么

$$\|\tilde{U}^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

**证明:** 我们首先证明在所有左逆中, 伪逆范数最小. 对所有  $x \in \ell^2(\Gamma)$ , 我们均可将其写为  $x = x_1 + x_2$ , 此处,  $x_2 \in \mathbf{Im}(U)^\perp$  和  $x_1 \in \mathbf{Im}(U)$ . 那么,

$$\frac{\|\tilde{U}^{-1}x\|}{\|x\|} = \frac{\|\tilde{U}^{-1}x_1\|}{\|x\|} = \frac{\|\bar{U}^{-1}x_1\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\bar{U}^{-1}x_1\|}{\|x_1\|},$$

由此即可得到

$$\|\tilde{U}^{-1}\| \leq \|\bar{U}^{-1}\|.$$

注意到  $x_1 \in \mathbf{Im}(U)$ , 那么存在一个  $f \in \mathbf{H}$  使得  $x_1 = Uf$ . 那么, 我们有

$$\|\tilde{U}^{-1}x\| = \|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}\|Uf\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}\|x\|.$$

这蕴含着

$$\|\tilde{U}^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

我们下面还需证明:

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*.$$

首先容易证明算子  $U^*U$  可逆. 那么, 下面我们只需证明

$$(U^*U)\tilde{U}^{-1}x = U^*x.$$

确实, 当  $x \in \mathbf{Im}(U)^\perp$  时, 上述结论成立. 当  $x \in \mathbf{Im}(U)$  时, 也容易证明其成立. 证毕.

### 8.3 对偶框架

在下面定理中, 我们将显示, 伪逆与对偶框架紧密相关.

**定理 8.2** 假定  $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$  是框架界为  $A, B$  的框架. 其对偶框架定义为

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1}\phi_n.$$

那么,  $\tilde{\phi}_n$  满足

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\phi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2,$$

和

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n.$$

如果框架是紧的 ( $A = B$ ), 那么  $\tilde{\phi}_n = A^{-1}\phi_n$ .

证明: 回忆

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*.$$

及

$$U^*x = \sum_{n \in \Gamma} x[n]\phi_n.$$

那么,

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = (U^*U)^{-1} \sum_{n \in \Gamma} x[n]\phi_n.$$

因此,

$$\tilde{U}^{-1}x = \sum_{n \in \Gamma} x[n]\tilde{\phi}_n.$$

如果我们选取

$$x[n] = Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle,$$

那么,

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n.$$

注意到,我们可用算子 $U^*U$ 来描述框架定义为

$$A\|f\|^2 \leq \langle U^*Uf, f \rangle \leq B\|f\|^2.$$

那么, 我们可将

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\phi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2,$$

描述为

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \langle (U^*U)^{-1}f, f \rangle \leq \frac{1}{A}\|f\|^2.$$

我们可用如下结果证明该结论:

**引理 8.1** 如果 $L$ 是一个自伴随算子, 且存在 $A > 0, B > 0$ 使得

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad A\|f\|^2 \leq \langle Lf, f \rangle \leq B\|f\|^2$$

那么 $L$ 可逆且

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \langle L^{-1}f, f \rangle \leq \frac{1}{A}\|f\|^2.$$

证毕.

## 第九章 框架II

### 9.1 Riesz基

对于框架 $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ , 如果其中元素是线性独立的. 那么, 我们称 $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个Riesz基. 那么, 其相应的对偶框架 $\{\tilde{\phi}_n\}_{n \in \Gamma}$ 也是线性独立的. 一个简单的观察是

$$\phi_p = \sum_{n \in \Gamma} \langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n.$$

根据线性独立的假定, 我们有

$$\langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \rangle = \delta[p - n].$$

由此可见, 对偶Riesz基是一组双正交基.

### 9.2 逆框架计算

如我们先前所述, 当我们试图通过 $\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \Gamma}$ 重建 $f$ 的时候, 我们需要计算

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1} \phi_n$$

从而可用

$$f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

来重建 $f$ .

但是, 在很多应用中, 框架 $\phi_n$ 依赖于信号 $f$ . 我们不能事先计算其相应的对偶框架. 由此, 人们考虑更为有效的计算方法.

我们考虑

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = (U^*U)^{-1}(U^*U)f = L^{-1}Lf,$$

此处

$$Lf = U^*Uf = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

因此, 我们需要计算的是  $f = L^{-1}g$ . 我们下边介绍框架算法.

**定理 9.1** 令  $g \in \mathbf{H}$ . 假定  $f = L^{-1}g$  且初始值  $f_0 = 0$ . 假定  $\gamma > 0$  是一个松弛参数. 对任意的  $n > 0$ , 令

$$f_n = f_{n-1} + \gamma(g - Lf_{n-1}).$$

如果

$$\delta = \max\{|1 - \gamma A|, |1 - \gamma B|\} < 1,$$

那么

$$\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|,$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

当  $\delta$  达到最小值

$$\delta = \frac{B - A}{B + A} = \frac{1 - A/B}{1 + A/B}$$

这个算法的收敛率最大. 这相当于选择

$$\gamma = \frac{2}{A + B}.$$

### 9.3 框架投影与减噪

框架可用来减少在信号传递过程中的噪声干扰. 因而在数模转换中也有较为重要的应用. 其主要做法就是将加噪的框架系数正交投影到  $\mathbf{Im}U$  上, 从而达到减噪的目的.

**命题 9.1** 从  $\ell^2(\Gamma)$  到  $\mathbf{Im}U$  的正交投影是

$$Px[n] = U\tilde{U}^{-1}x[n] = \sum_{p \in \Gamma} x[p] \langle \tilde{\phi}_p, \phi_n \rangle.$$

那么, 向量  $x \in \ell^2(\Gamma)$  可以看作一个框架系数, 如果和仅仅如果  $x = Px$ , 这也就是说  $x$  需满足如下方程组

$$x[n] = \sum_{p \in \Gamma} x[p] \langle \tilde{\phi}_p, \phi_n \rangle, \quad n \in \Gamma.$$

我们假定框架系数  $Uf[n]$  被噪声  $W[n]$  所污染, 这里  $W[n]$  是一个随机变量. 那么, 我们考虑框架投影:

$$P(Uf + W) = UF + PW,$$

这里

$$PW[n] = \sum_{p \in \Gamma} W[p] \langle \tilde{\phi}_p, \phi_n \rangle.$$

注意到  $P$  是一个正交投影, 那么  $\|PW\| \leq \|W\|$ . 我们下面的定理, 对于  $E\{|PW[n]|^2\}$  有了一个更为精细的刻画.

**命题 9.2** 假定  $\|\phi_n\| = C, \forall n \in \Gamma$ . 如果  $W$  是一个均值为 0 的白噪声且方差为  $E\{|W[n]|^2\} = \sigma^2$ , 那么

$$E\{|PW[n]|^2\} \leq \frac{\sigma^2 C^2}{A}.$$

如果框架是紧的, 那么等号成立.

## 9.4 采样与量子化

对于函数  $f$ , 我们定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

我们令

$$U_T := \{f : \text{supp } \hat{f} \subset [-\pi/T, \pi/T]\}.$$

那么, 我们有如下的 Shannon 采样定理:

**定理 9.2** 如果  $f \in U_T$ , 那么

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) h_T(t - nT),$$

这里

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

注意到下面的命题:

**命题 9.3** 令  $h_T(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$ , 那么  $\{h_T(t - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $U_T$  的一个正交基. 如果  $f \in U_T$ , 那么

$$f(nT) = \frac{1}{T} \langle f, h_T(\cdot - nT) \rangle.$$

但是,  $f(nT)$  通常需要量子化, 从而不可避免的引入误差. 所谓量子化, 就是将  $f(nT)$  通过  $\mathbb{Z}\delta$  中的一个数字代替, 这里  $\delta$  是一个固定的常数. 人们通常可以在  $\mathbb{Z}\delta$  中选择一个最接近  $f(nT)$  的数字, 即  $q[n] := \lfloor \frac{f(nT)}{\delta} + \frac{1}{2} \rfloor \delta$ . 这个过程便引入了误差项

$$W[n] = q[n] - f[nT].$$

人们可以通过增加采样率的方式来降低误差. 令  $T_0 = T/K$ . 那么,

$$f(nT_0) = \frac{1}{T} \langle f, h_T(\cdot - nT_0) \rangle.$$

注意到对任意固定的  $k, 1 \leq k \leq K$ , 那么  $\{h_T(t - kT/K - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $U_T$  的一组正交基. 因此,

$$\{\phi_n(t) = h_T(t - nT_0)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{h_T(t - kT/K - nT)\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{Z}}$$

是  $K$  个正交基的并. 因此, 其也是  $U_T$  的一个紧框架, 且  $A = B = KT = T_0$ . 那么, 框架投影能够减少因为量子化所引入的“噪声”, 即:

$$E\{|PW[n]|^2\} = \frac{\sigma^2 C^2}{A} = \frac{\sigma^2}{K}.$$

注意到  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是一个紧框架, 因此  $\tilde{\phi}_n = \frac{1}{T_0} \phi_n$ . 由此, 我们得到

$$Px[n] = \frac{1}{T_0} \sum_p x[p] \langle h_T(t - pT_0), h_T(t - nT_0) \rangle.$$

因此, 正交投影可写作如下卷积形式:

$$Px[n] = x * h_0[n], \quad h_0[n] = \frac{1}{T_0} \langle h_T(t), h_T(t - nT_0) \rangle.$$



# 第十章 Gabor框架和小波框架

## 10.1 Gabor框架

我们考虑如何构造 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架. 一种选择是Gabor框架. 其初始形式为窗口Fourier变换: 对于 $g \in L^2(\mathbb{R})$ , 令

$$g_{u,\xi}(t) = \exp(i\xi t)g(t-u).$$

我们可对其标准化为 $\|g\| = 1$ , 因而亦可得到 $\|g_{u,\xi}\| = 1$  对任意的 $(u, \xi) \in \mathbb{R}^2$ . 那么, 与之相应的窗口Fourier变换为: 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) dt.$$

我们下面看几个例子:

**例子 10.1** 如果我们选择

$$f(t) = \exp(i\xi_0 t),$$

那么, 其Fourier变换为

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \xi_0).$$

然而, 其窗口Fourier变换为

$$Sf(u, \xi) = \hat{g}(\xi - \xi_0) \exp[-iu(\xi - \xi_0)].$$

窗口Fourier变换有和Fourier变换类似的特征:

**定理 10.1** 如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 那么

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \xi)g(t-u) \exp(i\xi t) d\xi du,$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du.$$

在应用中,人们需要考虑窗口Fourier变换的离散形式. 对于Fourier变换,其离散形式为Fourier级数展开. 然而对窗口Fourier变换,其离散形式为Gabor 框架展开. 令

$$g_{n,k}(t) = g(t - nu_0) \exp(ik\xi_0 t)$$

那么,人们关心在什么条件下 $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ 是一个框架. 下面定理给出了必要条件.

**定理 10.2**  $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ 是一个框架的必要条件是

$$\frac{2\pi}{u_0\xi_0} \geq 1.$$

框架界 $A, B$ 必须满足:

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{2\pi}{u_0\xi_0} \leq B \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad A &\leq \frac{2\pi}{\xi_0} \sum_n |g(t - nu_0)|^2 \leq B \\ \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad A &\leq \frac{1}{u_0} \sum_k |\hat{g}(\omega - k\xi_0)|^2 \leq B. \end{aligned}$$

注意到Fourier级数是对一组正交基底的展开. 自然的,我们想知道是否存在一组合适的选择,使得 $g_{n,k}$ 组成一个正交基. 下面的Balian-Low定理显示,这样的函数 $g$ 具有很强的限制. 倘若我们要求 $g_{n,k}$ 组成一个正交基,那么 $u_0\xi_0 = 2\pi$ . 下面定理给出了一个必要条件.

**定理 10.3 (Balian-Low)** 如果 $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ 是一个Gabor框架,且 $u_0\xi_0 = 2\pi$ ,那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt = \infty \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \infty.$$

这个定理表明,如果我们要求 $g$ 紧支集且可微,我们不能构造离散Gabor正交基. 但是,我们能够验证,如果我们选择

$$g = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \chi_{[-u_0/2, u_0/2]}$$

且 $u_0\xi_0 = 2\pi$ ,那么, $g_{n,k}$ 组成一组正交基.

对于Balian-Low定理的证明,需要Zak变换. Zak变换,也称为Weil-Brezin映射,在多个领域中均有重要的应用. 我们在此对其作简单介绍. 这个变换通过如下方式定义:

$$(Zf)(s, t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \exp(2\pi i t \ell) f(s - \ell).$$

我们能将变换 $Z$ 考虑为从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2([0, 1]^2)$ 的一个映射: 我们令

$$e_{m,n}(x) := \exp(2\pi imx)e(x-n),$$

这里 $e(x) = 1, 0 \leq x < 1$ 否则为0. 那么

$$\begin{aligned} (Ze_{m,n})(s,t) &= \sum_{\ell} \exp(2\pi i t \ell) \exp(2\pi im(s-\ell))e(s-n-\ell) \\ &= \exp(2\pi im s) \exp(-2\pi i t n)(Ze)(s,t) \end{aligned}$$

注意到 $(Ze)(s,t)$ 在 $[0, 1]^2$ 上几乎处处为1. 因此,  $Z$ 将 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个正交基映射为 $L^2([0, 1]^2)$ 中的一个正交基. 因此,  $Z$ 是UNITARY. 根据Zak变换的定义, 如果我们允许将 $(s,t)$ 延伸到 $[0, 1]^2$ 外面, 那么

$$\begin{aligned} (Zf)(s,t+1) &= (Zf)(s,t) \\ (Zf)(s+1,t) &= \exp(2\pi it)(Zf)(s,t). \end{aligned}$$

我们定义空间 $\mathcal{Z}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : F(s,t+1) = F(s,t), F(s+1,t) = \exp(2\pi it)F(s,t), \\ &\|F\|_{\mathcal{Z}}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |F(s,t)|^2 dxdt < \infty\}. \end{aligned}$$

那么,  $Z$ 是从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{Z}$ 的Unitary映射. 其逆映射定义为: 对所有的 $F \in \mathcal{Z}$ ,

$$(Z^{-1}F)(x) = \int_0^1 F(x,t)dt.$$

我们现在考虑Zak变换对 $g_{m,n}$ 的作用. 如果 $g_{m,n} = \exp(2\pi imx)g(x-n)$ , 那么

$$(Zg_{m,n})(s,t) = \exp(2\pi im s) \exp(-2\pi i t n)(Zg)(s,t).$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n} \rangle|^2 &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle Zf, Zg_{m,n} \rangle|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^1 \int_0^1 \exp(-2\pi im s) \exp(2\pi i t n) (Zf)(s,t) \overline{(Zg)(s,t)} dsdt \right|^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |(Zf)(s,t)|^2 |(Zg)(s,t)|^2 dsdt. \end{aligned}$$

由此可得, 对于 $f \in \mathcal{Z}$ ,  $ZU^*UZ^{-1} = |(Zg)(s,t)|^2 f$ . 因此, 假定 $\tilde{g}_{m,n}$ 是 $g_{m,n}$ 的对偶框架, 那么

$$Z\tilde{g}_{m,n} = |Zg|^{-2} Zg_{m,n}.$$

根据上面的分析, 我们可得到如下结论:

**定理 10.4** (i) 假定  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . 那么,  $\{\exp(2\pi imx)g(x-n)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个框架如果和仅仅如果存在  $A > 0, B > 0$  使得

$$\forall (u, \xi) \in [0, 1]^2, A \leq |Zg(u, \xi)|^2 \leq B \quad (10.1)$$

这里  $A, B$  是框架界.

(ii) 如果 (10.1) 成立, 那么对偶框架的对偶窗口  $\tilde{g}$  为

$$Z\tilde{g}(u, \xi) = 1/\overline{Zg(u, \xi)}.$$

## 10.2 Gabor框架的对偶框架

我们现在考虑 Gabor 框架  $g_{n,k}$  的对偶框架

$$\tilde{g}_{n,k} = (U^*U)^{-1}g_{n,k}.$$

下面的定理显示 Gabor 框架的对偶框架仍是一个 Gabor 框架:

**定理 10.5** 框架  $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$  的对偶框架能写作如下形式:

$$\tilde{g}_{n,k}(t) = \tilde{g}(t - nu_0) \exp(ik\xi_0 t), \quad (10.2)$$

此处

$$\tilde{g} = (U^*U)^{-1}g.$$

## 10.3 特殊函数

令

$$g(t) := \pi^{-1/4} \exp(-t^2/2).$$

那么,  $\{g_{n,k}\}$  是一个框架, 如果和仅仅如果  $2\pi \geq u_0\xi_0$ .

## 10.4 紧框架

**定理 10.6** 令  $g$  是一个支集在  $[-\pi/\xi_0, \pi/\xi_0]$  的函数. 如果

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{2\pi}{\xi_0} \sum_n |g(t - nu_0)|^2 = A.$$

那么,  $\{g_{n,k}\}$  是个紧框架, 且框架界为  $A$ .

在Gabor框架里, 最令人感兴趣的问题为线性独立猜想:

**猜想 10.1** 如果  $g \in L^2(\mathbb{R})$  且  $(\alpha_k, \beta_k), k = 1, \dots, N$  是  $\mathbb{R}^2$  中任意  $N$  个不同的点, 那么

$$\{\exp(i\alpha_k t)g(t - \beta_k)\}_{k=1}^N$$

线性独立.

当前最好的结果为如下论文中得到的:

P.A. Linnell, Von Neumann algebras and linear independence of translates, Proc. AMS 127 (1999), 3269-3277.

## 10.5 小波框架

令

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{t - nu_0 a^j}{a^j}\right).$$

那么在什么条件下  $\psi_{j,n}$  形成一个框架呢? 令

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty.$$

**定理 10.7** 如果  $\{\psi_{j,n}\}$  是  $L^2$  的一个框架, 那么

$$A \leq \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} \leq B$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \leq \frac{1}{u_0} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B.$$

**定理 10.8** 令

$$\beta(\xi) = \sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)| |\hat{\psi}(a^j \omega + \xi)|$$

$$\Delta = \sum_{k \neq 0} (\beta(2\pi k/u_0) \beta(-2\pi k/u_0))^{1/2}.$$

如果  $u_0, a$  使得

$$A_0 = \frac{1}{u_0} (\inf_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 - \Delta) > 0$$

$$B_0 = \frac{1}{u_0} (\sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_j |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 + \Delta) < \infty$$

那么  $\psi_{j,n}$  是一个  $L^2(\mathbb{R})$  的框架, 且框架界为  $A_0, B_0$ .



## 参考文献

- [1] Aczel, J, A mean value property of the derivative of quadratic polynomials-without means values and derivatives, *Math. Mag.* 58, 42-45, 1985.
- [2] Bailey, D. F. A mean-value property of cubic polynomials without mean values, *Math. Mag.* 65, 123-124, 1992.
- [3] C. de Boor, A leibniz formula for multivariate divided differences, *SIAM J. Numer. Anal.* 41(2003),856-868.
- [4] C. de Boor, Divided differences, *Surveys in Approximation Theory* 1 (2005), 46-69.
- [5] M. S. Floater, A chian rule for multivariate divided differences, to appear in *BIT*.
- [6] J. Carnicer and M. Gasca (2001), A conjecture on multivariate polynomial interpolation, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat.* 95, 145-53.
- [7] E. Candès, J. Romberg, T. Tao, Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Trans. Inform. Theory* 52(2)(2006)489-509.
- [8] A. Cohen, W. Dahmen and R. DeVore, Compressed sensing and best k-term approximation, *J. Amer. Math. Soc.* 22 (2009), 211 - 231.