

多项式插值 (II)

1. 插值算子

我们用 $C[a, b]$ 表示区间 $[a, b]$ 上连续函数组成的线性空间, 对于其中的元素 f , 定义范数为

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

我们假定插值点集合选定为 $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$. 定义算子 $X : C[a, b] \rightarrow P_n$, $X(f)$ 为在结点 $x_i, i = 0, \dots, n$ 处插值函数 f 的次数不超过 n 的多项式. 我们称 X 为 Lagrange 算子, 且 X 的范数定义为

$$\|X\| := \sup_{\|f\|=1} \|X(f)\|.$$

定理 1. *Lagrange* 插值算子 X 的范数为

$$\|X\| = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)|,$$

此处 ℓ_i 为 *Lagrange* 插值基函数.

Proof. 依据 $\|X\|$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sup_{\|f\|=1} \|X(f)\| \\ &= \sup_{\|f\|=1} \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x) \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x) \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)|. \end{aligned}$$

□

那么, 为什么我们对算子 X 的范数感兴趣? 我们令

$$d^* := \min_{p \in P_n} \|f - p\|.$$

那么, 我们有

定理 2.

$$\|f - X(f)\| \leq (1 + \|X\|)d^*.$$

Proof. 我们假设 p^* 为 P_n 中对 f 的最佳逼近多项式。我们考虑

$$\begin{aligned} \|f - X(f)\| &\leq \|f - p^*\| + \|p^* - X(f)\| \\ &= d^* + \|X(p^* - f)\| \leq d^* + \|X\|\|p^* - f\| = (1 + \|X\|)d^*. \end{aligned}$$

□

因此, 范数 $\|X\|$ 的大小度量了 $X(f)$ 与对 X 最佳逼近的差距。对于 Lagrange 算子 X 的范数, 人们有如下估计:

定理 3 (Erdős, Brutman). *Lagrange* 算子 X 的范数满足如下不等式

$$\|X\| \geq \frac{2}{\pi} \log n + 0.5212.$$

一个自然的问题是: 人们能否选择合适的插值结点以至于 $\|X\|$ 尽可能接近下界呢? 我们下面介绍 Chebyshev 点。Chebyshev 多项式定义为 $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$. 那么, 容易看出, Chebyshev 多项式的零点为 $\cos((2j-1)\pi/2n)$. 这些点可以作为一类插值结点, 我们称其为 Chebyshev 结点.

定理 4. 如果 X 是相应于 Chebyshev 结点的 Lagrange 插值算子, 那么

$$0.9625 < \|X\| - \frac{2}{\pi} \log n < 1.$$

2. 二元多项式插值

假定 F 是定义在区域 D 上的实值函数空间, 且有一基底为 $\{f_1, \dots, f_n\}$. 我们假定有 n 个不同的点

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset D.$$

对每个点 x_i , 都有一个与之相应的 $y_i \in \mathbb{R}$ 与之对应。那么, 我们希望找一函数 f

$$f = \sum_{j=1}^n c_j f_j,$$

满足如下插值条件

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

我们称矩阵

$$(f_j(x_i))_{j=1,\dots,n; i=1,\dots,n}$$

为 **插值矩阵**. 那么, 对任意的数值 $y_i, i = 1, \dots, n$ 插值问题均可解的必要和充分条件是插值矩阵非奇异.

定理 5. 令 F 是定义在 D 上的 n 维线性函数空间. 对任意的数值 $y_i, i = 1, \dots, n$, F 中存在一个函数 f 使得

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

的充要条件是 0 数据仅被 F 中的 0 元素插值.

我们称 n 维函数空间 F 为 **Haar 空间**, 如果 F 中的每一个非 0 函数落在 D 中零点个数均不超过 n , 或者说如果 F 中有一函数落在 D 中的零点个数超过 n , 那么该函数必为 0 .

定理 6. 假定 F 有一个基底 $\{f_1, \dots, f_n\}$. 下面的性质是等价的:

- a. F 是一个 *Haar* 空间.
- b. 对 D 中任意 n 个不同的点 $x_1, \dots, x_n$ 均有 $\det(f_j(x_i)) \neq 0$.

我们称 Haar 空间中的任一基底为 **Chebyshev 系统**.

下面是 $\mathbb{R}$ 上 Chebyshev 系统的例子:

- 1. $1, x, \dots, x^n$
- 2. $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

下面是 $(0, \infty)$ 上 Chebyshev 系统的例子:

- 3. $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_n} \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_n$
- 4. $(x + \lambda_1)^{-1}, \dots, (x + \lambda_n)^{-1} \quad 0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

那么, 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 或更高维的欧式空间, 有连续函数组成的 Chebyshev 系统吗? 下面的 Haar 定理给出了否定的回答.

定理 7 (Haar). 设 D 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中包含一个内点 x_0 的集合. 设 $f_1, \dots, f_n, n > 1$ 定义于 D 上, 且其中每个函数均在 x_0 中的一个邻域内连续. 则 $\text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ 不是一个 *Haar* 空间.

根据上述定理, 对于二元多项式插值, 我们需要仔细的选择插值结点. 我们首先介绍一些概念.

设 $p_1, \dots, p_k$ 是一组线性无关的实系数二元多项式。令

$$\mathbb{P} := \text{span}\{p_1, \dots, p_k\}.$$

假定 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $x_1, \dots, x_k$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中 k 个互异的点。所谓二元多项式插值即指寻求 $p \in \mathbb{P}$ 使得

$$(1) \quad p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

由 Haar 定理, 为求得插值多项式, 首要问题是选择插值结点组 $x_1, \dots, x_k$, 使得插值问题 (1) 的解存在且唯一。若对任意的函数 f , 插值问题 (1) 的解存在且唯一, 我们则称 $q_1, \dots, q_k$ 是空间 $\mathbb{P}$ 的适定结点组。

我们通常选择空间 $\mathbb{P}$ 为次数不超过 n 的多项式, 即

$$\mathbb{P} = \{x^{k_1}y^{k_2} : k_1 + k_2 \leq n\}.$$

一个简单的构造适定结点组的方法是 **几何特征** 法。我们下面首先介绍几何特征的定义。

定义 2.1. 令 $X \subset \mathbb{R}^2$ 且 $\#X = \binom{n+2}{2}$ 。我们称 X 满足 n 阶几何特征条件如果对每个 $x \in X$ 存在直线 $L_1^x, \dots, L_n^x$ 使得

$$X \setminus \{x\} \subset L_1^x \cup \dots \cup L_n^x, \quad \text{且} \quad x \notin L_1^x \cup \dots \cup L_n^x.$$

为描述方便, 如果用字母 L 表示一条直线, 那么字母 L 也表示一个一次多项式使得其零点集合为改直线。如果点集 X 满足几何特征条件, 那么对每一个 $x_i \in X$ 我们可构造次数为 n 的多项式

$$\ell_{x_i} := \frac{L_1^{x_i} \cdots L_n^{x_i}}{L_1^{x_i}(x_i) \cdots L_n^{x_i}(x_i)}.$$

容易看出

$$\ell_{x_i}(x_i) = 1, \quad \ell_{x_i}(x_j) = 0, \quad j \neq i.$$

依此, 对满足几何特征条件的点集, 我们可构造插值多项式为

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_{x_i}.$$

我们下面看一个几何特征点集的例子:

例 1. (直线简单相交网) 在平面上任取 $n+2$ 条直线, 它们两两相交, 但任意三条均不交于一点。这样所得的交点的集合称为直线简单相交网。容易证明, 简单直线网即满足 n 阶几何特征条件。

例 2. (三角形网) 对于平面上任给的三角形, 我们将其三边均 n 等分。过每条边上的等分点, 分别作另两边的平行线。依此, 我们即得到该三角形的一个三角剖分。那么, 该三角剖分的顶点所组成的点集即满足 n 阶几何特征条件。

对于几何特征条件, 其中最吸引人的问题为 1982 年提出的如下猜想:

猜想 1. 满足 n 阶几何特征条件的点集中, 必然有 $n + 1$ 个点位于同一条直线上。

当前, 人们只能证明 $n \leq 4$ 时猜想成立 (参考 [1])。

REFERENCES

- [1] J. Carnicer and M. Gasca (2001), A conjecture on multivariate polynomial interpolation, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. 95, 145-53.