有限元外微分和 MHD (Magnetohydrodynamics) 系统的保结构离散

MHD (Magnetohydrodynamics) 模型描述导电流体与电磁场的相互作用，在等离子体物理、液态金属工业等领域中有重要的应用。作为 Navier-Stokes 方程和 Maxwell 方程耦合的多物理系统，$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_h = 0$ 在数值计算中十分重要。我们将考虑自然精确保持这一条件和能量稳定性的混合有限元离散。

利用 Brezzi 理论，可以证明线性化数值格式的适定性、收敛性和非线性离散问题解的整体存在性。作为适定性结果的一个应用，可以得到耦合系统的最优预条件子。对于稳态问题，一个新的乘子技巧可以用来保持磁场的无散度条件。

有限元外微分 (Finite Element Exterior Calculus, FEEC) 的观点在上述工作中起到重要的作用。FEEC 在电磁场、弹性力学等系统的计算和单元构造中有广泛的应用。在 FEEC 框架下，H^1 Lagrange 单元、$H(\mathrm{curl})$ 棱单元、$H(\mathrm{div})$ 面单元和 L^2 DG 单元可以用离散 de Rham 复形的方式统一构造和分析。

本次报告中我们将以上述工作为例，回顾 FEEC 的基本方法及其在保结构离散中的应用，以及能量稳定性在非线性问题的分析中的作用。

$$
\begin{tikzcd}
H_0(\mathrm{grad}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "\Pi_h^{\mathrm{grad}}"] & H_0(\mathrm{curl}) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[d, "\Pi_h^{\mathrm{curl}}"] & H_0(\mathrm{div}) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\Pi_h^{\mathrm{div}}"] & L_0^2 \arrow[d, "\Pi_h^0"] \\
H_0^h(\mathrm{grad}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & H_0^h(\mathrm{curl}) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] & H_0^h(\mathrm{div}) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & L_0^{2,h}
\end{tikzcd}
$$