

球形 Taylor-Couette 流分叉解的数值模拟研究*

袁 礼 傅德薰 马延文

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080)

摘要 用差分方法求解轴对称定常不可压 N-S 方程, 对内球旋转、外球不动的两同心球 (间隙比 $\sigma=0.18$) 之间的流体在 $Re_c \leq Re \leq 1500$ 范围内的定常分叉流动进行了数值模拟. 模拟结果表明在 $775 \leq Re \leq 1220$ 时可以存在稳定的 1- 涡和 2- 涡两种流态, 而在 $1220 < Re \leq 1500$ 时可以存在稳定的 0- 涡, 1- 涡和 2- 涡 3 种流态. 同一 Re 数下不同流态的形成和初始条件有关, 而用不同的内球角加速度可以得到不同的初始条件. 0- 涡和 2- 涡的产生主要取决于角加速度, 而 1- 涡的产生则还和破坏赤道对称性的扰动有关. 文中还分析了在较大 Re 数时子午面流场内鞍点的形成机理及其对形成 2- 涡的作用.

关键词 数值模拟 球形 Taylor-Couette 流 N-S 方程解非唯一性 对称破缺分叉

近 30 年来, 人们对两同心球之间的流动进行了大量的实验和理论研究^[1~5], 这种流动随 Re 数增大, 在从稳定态层流发展到湍流的过程中表现了一些典型的非线性力学行为. 虽然它和两同轴圆柱之间的 Taylor-Couette 流有相似之处, 但球不象圆柱那样受端面的影响, 因此研究起来更加单纯. 人们研究得较多的是内球旋转、外球静止的所谓球形 Couette 流, 当流体的密度和粘性系数为常数时, 控制参数为 Re 数 $\left(Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu} \right)$ 和间隙比 $\sigma \left(\sigma = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)$, Re 数大于失稳的临界值后会在赤道每侧产生一定数目的 Taylor 涡. 各种 Taylor 涡流态通常只能在一定控制参数范围内存在, 但在某些控制参数范围内, 在同一控制参数下可以存在几种流态, 例如实验^[1,2]发现, 间隙比 $\sigma=0.18$ 的同心球, 在超临界 Re 数下可以存在 0- 涡、1- 涡和 2- 涡 3 种定常流态和两种分别含 1- 涡和 2- 涡的非定常流态, 从实验上验证了 N-S 方程在 Re 数大于临界值后解不唯一. 对产生各种流态所需要的条件, 实验研究和数值模拟所指出的途径有分歧, 例如 Wimmer^[2]的实验表明当内球以很小的角加速度 ($\dot{\Omega}=0.0065\Omega_1^2$) 从静止加速到定常值时可以获得定常 1- 涡, 此种流态关于旋转轴和赤道都是对称的, 然而 Bartels^[3]用差分方法求解轴对称 N-S 方程时, 利用了赤道对称条件, 他发现不论 $\dot{\Omega}$ 取多小, 也算不出 1- 涡, 除非将赤道对称面位置稍稍偏离一点. 后来 Schrauf^[4]用伪弧长方法来模拟时, 发现在 $Re = Re_c$ 时, 从 0- 涡流态转变到 1- 涡流态有对称破缺分叉 (symmetry-breaking bifurcation), Marcus^[5]用拟谱

法解非定常轴对称 N-S 方程时取计算域为 $0 \leq \theta \leq \pi$ 就算出了 1- 涡, 且表明 1- 涡的产生总是经历了破坏赤道对称性的过程. 至于角加速度究竟如何影响初始流场, 从而得到不同的流态, 则还值得进一步研究.

当用定常数值方法模拟定常分叉解时, 也可以人为假设不同的初始条件. 例如 Yang¹⁾ 用了 $1/4$ 计算域 ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), 假设初始流场有一条或两条径向分界线, 形成 1- 涡或 2- 涡的锥形, 然后撤消分界线, 可算出稳定的 1- 涡和 2- 涡两种流态. 然而这些不同的初始条件最本质的区别是什么, 仍有待弄清楚.

本文用拟压缩性方法数值求解定常轴对称不可压缩流 N-S 方程, 模拟超临界 Re 数下几种稳定的定常分叉解. 在文献[6]提出的 LU-SGS 格式基础上, 在左端的隐式项中加入物理粘性项, 不仅解决了该格式计算中低 Re 数不稳定的问题, 还提高了格式的收敛率. 对输运项采用三阶迎风紧致差分^[7]来离散, 提高了对旋涡的分辨能力. 对 $\sigma=0.18$ 的两同心球之间的 Couette 流在超临界 Re 数下非唯一的三种定常流态进行数值模拟, 模拟结果表明超临界 0- 涡可用内球以较大的角加速度从静止加速到定常角速度而获得, 2- 涡可以用稍微小些的角加速度获得, 1- 涡的获得除了需要很小的角加速度外, 还需要有破坏赤道对称性的扰动存在. 分析了同一 Re 数下不同分叉解的获得途径和物理原因. 计算的平衡力矩系数及 Taylor 涡尺寸和实验符合较好.

1 主控方程和数值方法

设 τ 为时间, p 为压力, u, v, w 为直角坐标系中的速度分量, \hat{Q} 为原参数守恒型变量, \hat{E}, \hat{F} 和 \hat{G} 为无粘矢量通量, \hat{E}_v, \hat{F}_v 和 \hat{G}_v 为粘性通量. 在一般曲线坐标系中, 加了拟压缩性项的不可压 N-S 方程为^[9]

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

这里

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U \\ Uu + \xi_x p \\ Uv + \xi_y p \\ Uw + \xi_z p \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta V \\ Vu + \eta_x p \\ Vv + \eta_y p \\ Vw + \eta_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta W \\ Wu + \zeta_x p \\ Wv + \zeta_y p \\ Ww + \zeta_z p \end{bmatrix},$$

式中 β 为拟压缩性因子, U, V, W 是逆变速度分量, J 是坐标变换 Jacobian 矩阵的行列式, 对层流, 粘性通量表达式为

1) Yang J K. Numerical studies of axially symmetric motion of an incompressible viscous fluid between two concentric rotating spheres Ph D dissertation, Marquette University, 1987

$$\hat{E}_v = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla\xi \cdot \nabla\xi)u_\xi + (\nabla\xi \cdot \nabla\eta)u_\eta + (\nabla\xi \cdot \nabla\zeta)u_\zeta \\ (\nabla\xi \cdot \nabla\xi)v_\xi + (\nabla\xi \cdot \nabla\eta)v_\eta + (\nabla\xi \cdot \nabla\zeta)v_\zeta \\ (\nabla\xi \cdot \nabla\xi)w_\xi + (\nabla\xi \cdot \nabla\eta)w_\eta + (\nabla\xi \cdot \nabla\zeta)w_\zeta \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_v = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla\eta \cdot \nabla\xi)u_\xi + (\nabla\eta \cdot \nabla\eta)u_\eta + (\nabla\eta \cdot \nabla\zeta)u_\zeta \\ (\nabla\eta \cdot \nabla\xi)v_\xi + (\nabla\eta \cdot \nabla\eta)v_\eta + (\nabla\eta \cdot \nabla\zeta)v_\zeta \\ (\nabla\eta \cdot \nabla\xi)w_\xi + (\nabla\eta \cdot \nabla\eta)w_\eta + (\nabla\eta \cdot \nabla\zeta)w_\zeta \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_v = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla\zeta \cdot \nabla\xi)u_\xi + (\nabla\zeta \cdot \nabla\eta)u_\eta + (\nabla\zeta \cdot \nabla\zeta)u_\zeta \\ (\nabla\zeta \cdot \nabla\xi)v_\xi + (\nabla\zeta \cdot \nabla\eta)v_\eta + (\nabla\zeta \cdot \nabla\zeta)v_\zeta \\ (\nabla\zeta \cdot \nabla\xi)w_\xi + (\nabla\zeta \cdot \nabla\eta)w_\eta + (\nabla\zeta \cdot \nabla\zeta)w_\zeta \end{bmatrix}.$$

对时间导数用向后 Euler 差分离散, 将 $n+1$ 时间层的项对 n 层线性化, 得到 delta 形式的方程

$$[I + \Delta\tau(D_\xi \hat{A} + D_\eta \hat{B} + D_\zeta \hat{C})]^n \delta \hat{Q} = RHS^n = -\Delta\tau[(D_\xi(\hat{E} - \hat{E}_v) + D_\eta(\hat{F} - \hat{F}_v) + D_\zeta(\hat{G} - \hat{G}_v))]^n, \tag{2}$$

式中 I 为单位矩阵, $\delta \hat{Q} = \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n$, D_ξ, D_η, D_ζ 分别为逼近 $\partial_\xi, \partial_\eta, \partial_\zeta$ 的差分算子, \hat{A}, \hat{B} 和 \hat{C} 为无粘通量的 Jacobian 矩阵.

本文用 lower-upper symmetric Gauss-Seidel 格式^[6]解方程 (2), 其形式可表示成

$$LD^{-1}U\delta \hat{Q} = RHS^n, \tag{3}$$

式中

$$L = I + \Delta\tau(\nabla_\xi \hat{A}^+ + \nabla_\eta \hat{B}^+ + \nabla_\zeta \hat{C}^+ - \hat{A}^- - \hat{B}^- - \hat{C}^-),$$

$$D = I + \Delta\tau(\hat{A}^+ + \hat{B}^+ + \hat{C}^+ - \hat{A}^- - \hat{B}^- - \hat{C}^-),$$

$$U = I + \Delta\tau(\Delta_\xi \hat{A}^- + \Delta_\eta \hat{B}^- + \Delta_\zeta \hat{C}^- + \hat{A}^+ + \hat{B}^+ + \hat{C}^+). \tag{4}$$

为了达到标量求逆, (4) 式的 Jacobian 矩阵可用近似矩阵来构造:

$$\hat{A}^\pm = \frac{1}{2} [\hat{A} \pm \rho(\hat{A})I],$$

$$\rho(\hat{A}) = \kappa \max[|\lambda(\hat{A})|], \tag{5}$$

式中 $\lambda(\hat{A})$ 为 Jacobian 矩阵 \hat{A} 的特征值, 矩阵 \hat{A} 及其特征值详见文献 [6]. 原文中 $\kappa \geq 1$, 本文一律取 $\lambda = 1$. 由于原来的 LU-SGS 格式^[6]未计入隐式物理粘性项, 会使格式不稳定, 本文引进简化的隐式物理粘性项来增强稳定性, 在该项中只保留了正交的物理粘性项以增强稳定性. 此时, (4) 式中的 Jacobian 矩阵应换为

$$\hat{A}^\pm = \frac{\hat{A}^\pm \rho(\hat{A})I}{2} \pm \frac{\alpha}{2} I_m, \tag{6}$$

式中 $\alpha = \gamma_i = \frac{1}{Re} \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_i$, $I_m = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$.

对于(3)式右端项 RHS^n 中所含的无粘通量一阶导数,可用文献[7]提出的三阶迎风紧致差分离散,迎风是根据无粘通量 Jacobian 矩阵的特征值正负来决定. 以 ξ 方向为例,

$$D_\xi \hat{E} = AD_\xi Q = A^+ F^+(Q) + A^- F^-(Q), \tag{7}$$

其中, $A^\pm = T_\xi \Lambda_\xi^\pm T_\xi^{-1}$. 采用三阶精度迎风紧致差分

$$\frac{1}{3} (2F_i^+ + F_{i-1}^+) = \frac{1}{6\Delta\xi} (-5Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1}), \tag{8}$$

$$\frac{1}{3} (2F_i^- + F_{i+1}^-) = \frac{1}{6\Delta\xi} (+5Q_{i+1} - 4Q_i - Q_{i-1}),$$

对紧邻边界的第一个内点用三阶精度的偏心差分.

所研究的同心球结构如图 1 所示,本文采用了 $1/4 (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ 和 $1/2 (0 \leq \theta \leq \pi)$ 两种计算区域,前者假设关于赤道 ($\theta = \pi/2$) 对称,后者则允许非赤道对称的数值误差扰动存在. 所有边界条件都显式处理. 在物面上速度满足无滑移条件,压力用建立在边界上的动量方程求得. 在对称轴上用对称条件. 参考压力选流场中某一固定点的值.

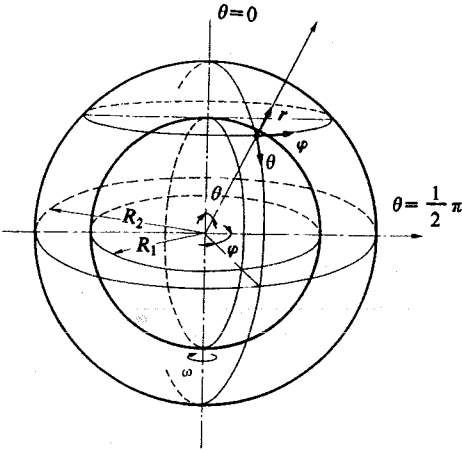


图 1 两同心球几何结构

2 初始条件和通向超临界非唯一定常流态的途径

本文所采用的初始条件有两种,其一为内球从静止以不同角加速度加速到定常 Re 数后所得到的流场,其二和 Yang¹⁾ 的相同: 旋转速度分量沿径向线性分布,子午面速度为零,全场压力为零,且人为加上不同的径向分界线. 用前者的目的主要是为了和实验作比较,以考察内球角加速度对最终流态的影响,用后者主要为了和 Yang¹⁾ 比较. 大量的实验和数值计算结果都表明,在内球从静止加速到超临界 Re 数所对应的角速度过程中,角加速度较大可以得到 0- 涡,稍小些可以得到 2- 涡,再小些且不加赤道对称约束,就可得到 1- 涡,至于角加速度在什么范围内才能得到什么样的涡,实验和计算的结果有较大差异. 可以想象实验中所引入的扰动是复杂的,如双球不同心、转轴和球壳间密封性差等引起的对称缺陷 (imperfection),存在幅度较大的非赤道对称甚至非轴对称的扰动,受非线性影响,更容易发生对称破缺失稳. 我们知道,超临界 Re 数下每一种定常流态都是 N-S 方程的分叉解,它们既然是稳定的解,就应当在一定的参数范围存在,而分叉又依赖于初始条件. 上述角加速度对分叉的影响主要是造成不同的初始流场. 下面分析一下为什么用不同的角加速度可以得到具有不同 Taylor 涡特征的初始流场.

1) 同968页脚注

首先我们引用 Marcus 等人计算的力矩 $-Re$ 分叉曲线来说明各流态可以保持稳定的 Re 数范围(见图 2). 在 $0 \leq Re \leq 645$ 之间只有唯一稳定的 0- 涡, 在 $651 \leq Re \leq 775$ 之间, 不加赤道对称性的 0- 或 2- 涡是线性不稳定的, 尽管在超临界 Re 数范围内, 但实际上只有 1- 涡存在. 在 $Re \geq 775$ 后 2- 涡和 1- 涡可以同时存在. 我们的模拟进一步表明, 超临界 0- 涡要在 $Re > 1220$ 后才能稳定. 现在假设定常 Re 数大于 1220. 内球的旋转从静止加速到这个超临界 Re 数, 流体的惯性限制了它的发展有一个滞后. 不论角加速度多大, 流动首先要经过低 Re 数流阶段. 事实上只要内球一转动, 惯性离心力立刻就会使流体在子午面形成二次环形流动, 在子午面上看即是 0- 涡流态. 如果角加速度较大, 流动才刚形成

0- 涡, 瞬时 Re 数就达到定常值, 以此作为初场, 最终流态就稳定在 0- 涡; 但如果角加速度稍小些但不是非常小, 瞬时 Re 数仍较快地通过 $651 \leq Re \leq 775$ 范围, 赤道非对称扰动来不及被放大, 流态还是 0- 涡, 流态继续受内球角加速度的影响, 流体的总涡量持续增加, 强迫流动结构继续演变, 流态更易于发展成较复杂的 2- 涡流态, 及至瞬时 Re 数达到定常值时, 2- 涡初场已经形成, 再发展下去, 终态就为定常 2- 涡. 如果角加速度很小, 瞬时 Re 数在 $651 \leq Re \leq 775$ 之间停滞很久, 微小的赤道非对称扰动就会得到放大, 经过一段时间后足以使非线性发生作用, 造成流态失稳, 从而形成 1- 涡流态, 以此为初场, 继续发展下去, 最终定常流态将是 1- 涡. 但在采用赤道对称条件时仅靠减小角加速度还不能得到 1- 涡, 为得到 1- 涡, 可根据分叉解对初始条件的依赖性, 事先假设初始流场有 1- 涡的形状. 对 1- 涡而言, 赤道上的径向速度由外球指向内球是其本质的特点. 在计算初期假设在赤道附近有一条径向分界线, 让两边的流动关于此线对称, 这样这条线上的流动指向外球, 根据连续方程, 可推测经过一段时间后赤道上流动可能指向内球, 这样赤道和此线之间就是 1- 涡的雏形, 撤消此线后流动有可能发展成 1- 涡. 但实验或模拟实验的计算不可能事先假设有 1- 涡的雏形, 这时非对称扰动对形成 1- 涡起关键的作用, 让我们分析赤道非对称的扰动是怎样影响分叉的.

由于同心球几何结构对称, 已知的 3 种定常流态关于旋转轴和赤道均对称, 从线性稳定性理论可知, 对它们的任何小扰动解都可分解成关于赤道对称和反对称的两部分模态, 这两部分都满足小扰动发展方程, 对任一 Re 数和波数对称模态和反对称模态将有不同的增长和衰减速率. 图 2 中在 $651 \leq Re \leq 775$ 范围内, 0- 涡和 2- 涡线性不稳定, 1- 涡线性稳定. Marcus 进一步指出对 0- 或 2- 涡, 扰动的对称模态线性稳定而反对称模态线性不稳定, 这表明上述 Re 数范围是 1- 涡最容易形成的范围, 因为很小的非对称扰动也会使其它流态失稳. 实际 N-S 方程计算表明流态经历了明显的赤道非对称过程后才恢复到对称的 1- 涡流态, 这种通向 1- 涡的途径被称为对称破缺分叉. 赤道非对称扰动可以在实验中存在, 在轴对称数值模拟时如用 $1/2$ 计算域, 也可以产生. 本文数值计算表明, 非对称稳非常缓慢, 所以当内球从静止加

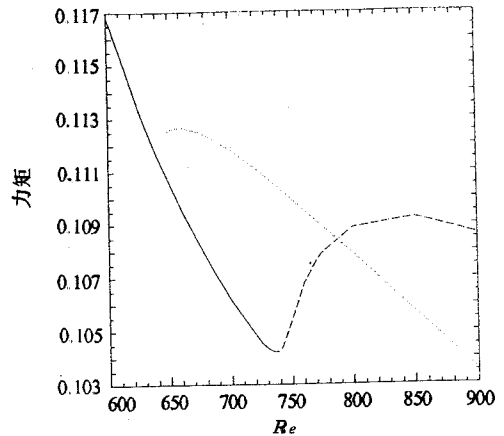


图 2 力矩 $-Re$ 曲线

实线为 0-1 涡, 短虚线为 1- 涡, 长虚线为 2- 涡.

图引自文献 [5]

速而终态 Re 数大于 $651 \leq Re \leq 775$ 范围内时,角加速度必须非常小,才能使对称破缺分叉得以在上述 Re 数范围内发生.

总结起来,在超临界 Re 数下获得稳定分叉解的数值方法如下:一是改变内球角加速度,其值较大时可获得 0- 涡,较小时可获得 2- 涡,非常小且不加赤道对称约束时可以获得 1- 涡.二是在某一流态可以保持稳定的 Re 数范围内,人为假设 Taylor 涡的分界线,强加这种流态的雏形,不管有无赤道对称性,最后也可能发展成稳定的涡流.这两种途径都利用了分叉对初始条件的依赖性.

3 计算结果和分析

本文计算中,1/2 计算域的网格数取为 $21(r) \times 129(\theta) \times 1(\varphi)$,1/4 计算域的周向网格数取为 65. 研究了 $\sigma=0.18, Re < 1500$ 的情况, Re 数增量 $\Delta Re=100$,在 $1150 \leq Re \leq 1230$ 之间 $\Delta Re=10$. 本文主要研究 $Re > Re_{c1}=645$ 以后的定常分叉流态,故下面只讨论了 $Re=800$ 和 $Re=1500$ 两种典型情况.

1. $Re=800$

如果取 1/4 计算域,从静止无论以什么样的角加速度加速,最终能稳定下来只有 2- 涡. 图 3 所示是从静止突然加速到定常角速度过程中的流态,其中图 3(a) 的流态和 Stokes 流相似,图 3(b), (c) 是带鞍点 S 的 0- 涡,继续算下去收敛到稳定的 2- 涡,如图 3(e) 所示,两涡间由一条近似直线隔开,分界线上流动指向内球,在外球上为汇. 在赤道上流动指向外球面,在外球面上形成源. Marcus^[5] 解释了鞍点 S 到赤道之间的流动其周向旋转速度和径向离心速度耦合较强,类似于 Taylor 涡,有重新分配旋转角动量的作用,但没说明鞍点的形成原因. 本文跟踪了子午面流函数、矢量图和横流动能,发现鞍点总是形成于二次环流的中心点附近,此处的 θ 速度分量较大,靠近内球向赤道流去和靠近外球返回极轴的流动形成剪切层,当 Re 数较大时这一剪切流较强,剪切层梯度增大,很容易形成鞍点. 随流态发展鞍点向赤道移动. 由于鞍点为横截面流动的驻点,从动能分布图 3(c) 可知,二次流动滞止较厉害,可能造成分离,不过这种分离仅使横流运动学特征发生变化. 当球缝较小时,两个壁面的分离泡(图 3(d)) 容易相连接形成 2- 涡,因此鞍点对形成 2- 涡起重要的中介作用.

对于 1/4 计算域,在离赤道约 1 个缝宽的地方假设一径向分界线,在计算的前 300 步内保持此线,然后取消,则流态最终收敛到 1- 涡,所得到的 1- 涡如图 4 所示. 而假设 2 条分界线则收敛到了 2- 涡. 这和 Yang^[1] 的计算结果一致. 本文还假设了 3 条彼此相隔约 σ 的径向分界线,但最终还是收敛到 1- 涡. 仔细分析可知,有 1 条或 3 条分界线时所得到的初始流场在赤道上流动指向内球,为汇,而这恰好是 1- 涡的主要特征. 上述例子既表明了分叉解对初始条件的依赖性,也表明 1- 涡和 2- 涡在赤道上流向有较大区别.

1- 涡还可以用 1/2 计算域算出. 内球从静止以 $\Delta t=0.025$ 线性加速 20 000 步至对应于 $Re=800$ 的定常值,流态最终会发展成 1- 涡. 然后让 Re 数一直增大到 1 500,1- 涡仍可以保持稳定.

2. $Re=1500$

从 Wimmer 的实验^[2] 知,此时存在 0-, 1-, 2- 涡 3 种流态,用 1/4 计算域从静止突然起动或以 $\dot{\Omega}=0.014$ 加速,解收敛到 0- 涡(图 5). 从静止以 $\dot{\Omega}=0.005$ 加速,最终流态为 2- 涡(图 6). 这验证了角

1) 同 968 页脚注

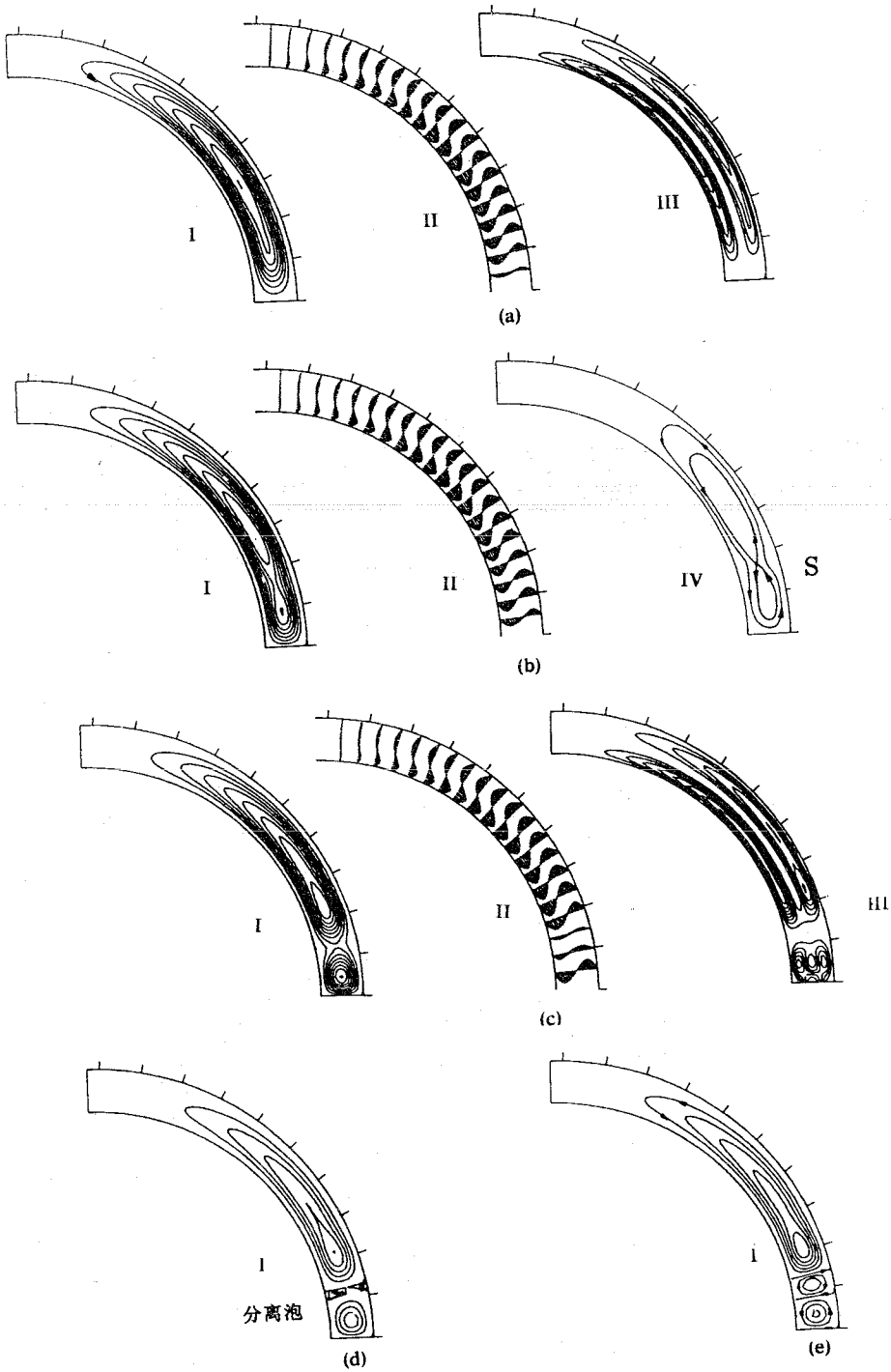


图 3 内球从静止突然起动到 2- 涡流态的转变过程

$Re = 800$, $\sigma = 0.18$, (a) 400 步, (b) 600 步, (c) 1 000 步, (d) 1 230 步, (e) 8 000 步, 定常态; I—子午面流线, II—速度矢量, III—速度动压头 $q = (u^2 + v^2)/2$, IV—鞍点 S 示意图

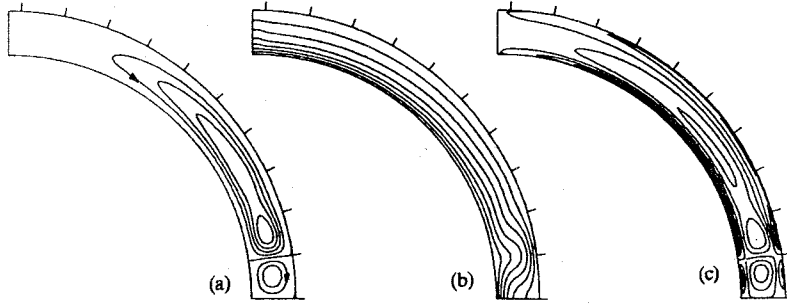


图 4 定常 1- 涡流态

$Re=800, \sigma=0.18$, (a) 子午面流线, (b) 周向角速度分布 $\Omega = \frac{w}{r \sin \theta}$, (c) 周向涡量分布

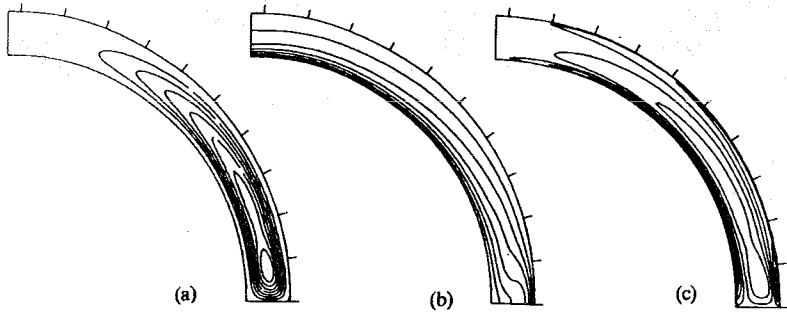


图 5 定常 0- 涡流态

$\dot{\Omega}_1=0.014, Re=1500, \sigma=0.18$, 其它说明同图 4

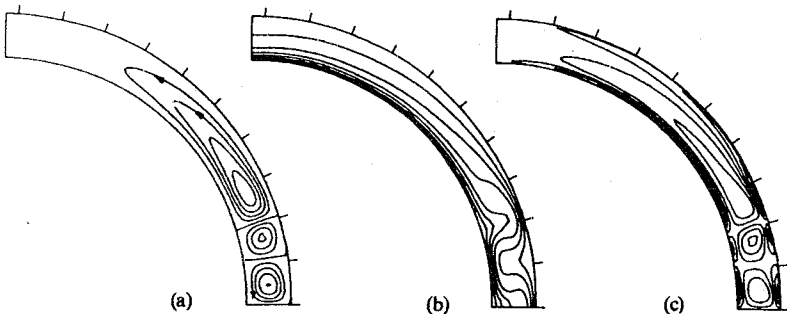


图 6 定常 2- 涡流态

$\dot{\Omega}_1=0.005, Re=1500, \sigma=0.18$, 其它说明同图 4

加速度较大时可获得 0- 涡, 较小时可获得 2- 涡的结论. 用 1/2 计算域, 可以算出 1- 涡. 从静止以 $\dot{\Omega}=0.0005$ 加速可算出 1- 涡流态(如图 7 所示). 计算出 3 种流态的力矩系数分别为 0.144, 0.166 和 0.177, 1- 涡的旋涡沿外球周向长 1.35σ , 这些值和实验^[2]比较, 最大误差不超过 6%.

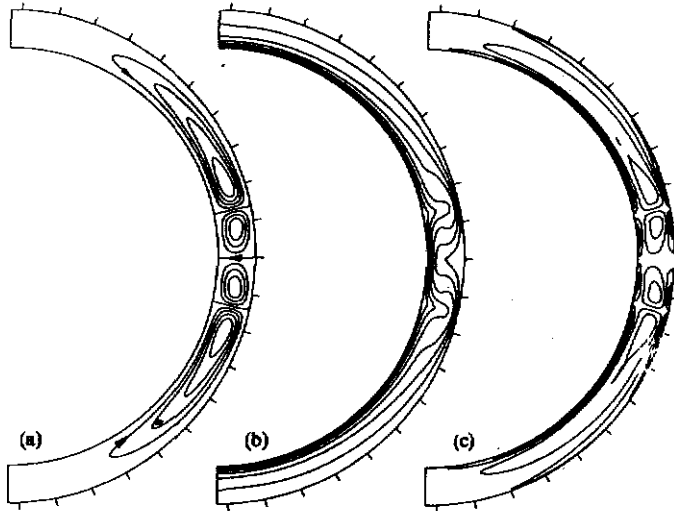


图7 定常1-涡流态

计算域为 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $Re=1500$, $\sigma=0.18$, 其它说明同图4

4 结论

本文用解轴对称定常不可压 N-S 方程的差分方法模拟研究了超临界 Re 数下非唯一的 Taylor-Couette 流, 计算结果和实验符合较好. 阐述了子午面流态中鞍点的形成机理和对形成 2- 涡的作用. 分析了导致各种旋涡流态的物理因素如控制参数和角加速度的作用, 指出超临界 2- 涡是 0- 涡的自然延续, $0 \rightarrow 2$ 发展过程保持了赤道对称性, 2- 涡是由带鞍点的 0- 涡通过横流分离形成的, 仅是运动学的分叉; 而 1- 涡则是流动自由度增加 (允许有破坏赤道对称性的扰动) 后通过对称破缺分叉得到的, 其形成过程是动力学分叉. 用不同的初始条件可以模拟出不同的平衡流态, 表明流动失稳后分叉解对初始条件有依赖性.

参 考 文 献

- 1 Sawatzki O, Zerip J. Das Stromfeld im Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelflachen, von Denen die innre rotiert. Acta Mechanica, 1970, 9: 13~35
- 2 Wimmer M. Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres. J Fluid Mech, 1976, 78: 317~335
- 3 Bartels F. Taylor vortices between two-concentric rotating spheres. J Fluid Mech, 1982, 119: 1~25
- 4 Schrauf G. The first instability in spherical Taylor-Couette flow. J Fluid Mech, 1986, 166: 287~303
- 5 Marcus P, Tuckerman L S. Simulation of flow between concentric rotating spheres. J Fluid Mech, 1987, 185: 1~65
- 6 Yoon S, Kwak D. Three-dimensional incompressible Navier-Stokes solver using lower-upper symmetric Gauss-Seidel algorithm. AIAA J, 1991, 29: 874~875
- 7 刘宏, 付德薰, 马延文. 迎风紧致格式与驱动方腔流动问题的直接数值模拟. 中国科学, A 辑, 1993, 23(6): 657~665