

第六章 双曲守恒律的其他高分辨率方法

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

January 19, 2010

6.1 ENO方法

6.2 WENO 方法

6.3 间断Galerkin 方法

6.1 (ENO Essentially Non-Oscillatory)与WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)方法简介

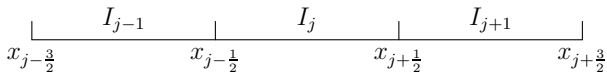
第六章 双曲守恒律的其他高分辨率方法

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

1. 有限体积型ENO/WENO 考虑一维标量守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

及如下网格剖分.



与有限差分方法不同, 有限体积方法以求解如下的网格平均值为目标

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x) dx \quad (2)$$

将(1)在网格单元 I_j 上做积分平均, 可得半离散形式

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{f(u)|_{x_{j+\frac{1}{2}}} - f(u)|_{x_{j-\frac{1}{2}}}}{\Delta x} = 0 \quad (3)$$

用数值通量 $\hat{f}(u^-, u^+)$ 代替(3)中的真实通量 $f(u)|_{x_{j+\frac{1}{2}}}$, 便得到如下半离散方程

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left[\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+) - \hat{f}(u_{j-\frac{1}{2}}^-, u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right] = 0 \quad (4)$$

这里的 $\{u_{j+\frac{1}{2}}^\pm\}$ 为函数 u 在网格交界点 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的值, 其中的“ \pm ”表示 u 从不同方向趋于网格交界点的极限值.

要求 $\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+)$ 是Lipschitz连续的, 满足相容性条件 $\hat{f}(u, u) = f(u)$, 且一般为几个相邻平均值的函数. ENO/WENO得到的数值通量, 如果取

$$u_{j+\frac{1}{2}}^- = u_j, \quad (5)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^+ = u_{j+1}, \quad (6)$$

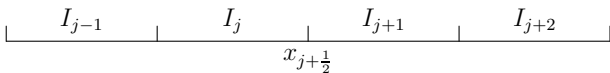
则所得的格式必须退化为单调格式。

下面的任务就是如何通过网格平均值 $\{\bar{u}_j\}$ 获得交界点处的值 $\{u_{j+\frac{1}{2}}^\pm\}$, 这一过程称为重构:

$$u_{j+\frac{1}{2}} = u(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^r)$$

ENO/WENO重构策略就是其中两种方法.

首先, 为了使交点处的值达到 r 阶精度, 必须使用 r 个网格上的平均值的线性组合. 以二阶精度 $r=2$ 为例, 考虑如下图所示的网格.



若重构 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的值, 可以有如下三组网格可供选择, 称之为重构的可选模板.

$$\text{模板1} \quad \{I_{j-1}, I_j\} \quad (7)$$

$$\text{模板2} \quad \{I_j, I_{j+1}\} \quad (8)$$

$$\text{模板3} \quad \{I_{j+1}, I_{j+2}\} \quad (9)$$

Harten, Engquist, Osher, and Chakravarthy 于1987年提出的ENO方法提供了一种选择模板的策略, 即选择最光滑的一个, 而光滑性的度量则使用Newton差商. 对二阶而言, 就是计算模板内两个网格上的平均值的divided差, 选择divided差的绝对值最小的模板来进行重构. 另外, 为了体现左右极限(即“±”)的区别, 在重构左极限时, 使用模板1和2作为可选模板(因为模板3对于 $x_{j+\frac{1}{2}}^-$ 而言是外插), 而在重构右极限时, 使用模板2和3作为可选模板.

例如, 若 u 在上图四个网格中的平均值分别为1, 4, 2, 1, 则对 $u_{j+\frac{1}{2}}^-$, 使用模板2, 对 $u_{j+\frac{1}{2}}^+$, 使用模板3.

$r = 3$ 阶精度重构举例, 注意左右极限的模板不同。

WENO方法则提供了另一种策略. 与ENO不同, 它不仅使用其中一个模板的值, 而是使用三个模板的某种凸组合, 使得, 在 u 光滑的区域, 达到 $2r-1$ 阶精度, 而在 u 间断的区域, 又趋近于ENO策略.

需要注意的是, 传统的有限体积方法通常采用先在固定模板上重构, 而后对重构出的值进行限制的策略. 该策略通过选择合适的限制器, 可以使离散方程的解满足TVD性质, 但理论分析表明, 具有TVD性质的一维离散格式最多只能达到二阶精度, 且在光滑区的极值点仅为一阶精度. 而ENO/WENO策略则突破了这一限制, 虽然目前仍没有很好的理论证明ENO/WENO策略具有类似TVD性质的某种稳定性, 但大量算例已经表明, ENO/WENO格式不仅能够很好地抑制数值振荡 (ENO数值震荡大小为 $O(\Delta x^r)$), 而且能够对光滑解达到3阶以上的高精度逼近.

1. 1D reconstruction of function value from cell averages

step 1 给定网格平均值 \bar{v}_j ，要重构的网格区间 I_i ，及重构的精度阶 k 。选择由 k 个网格平均值组成的插值模板

$$S(i) = \{i - r, \dots, i + s\}, \text{ where } r + s + 1 = k$$

。

step 2 构造原函数 $V(x)$ 的多项式逼近 $P_i(x)$ 。

step 3 对构造的原函数多项式求导，得到函数 $v(x)$ 的多项式逼近：
 $p_i(x) = P_i'(x)$ 。

step 4 计算网格界面的重构值（对于等距网格的1-7阶重构，可由Shu ICASE 97-65论文的表2.1 给出）

见Shu ICASE 97, 表2.1。

2. 1D reconstruction of flux function from point values

给定函数的点值

$$v_i \equiv v(x_i) \quad (10)$$

重构一通量型函数 $\hat{v}(x)$, 使得它高阶地逼近点导数

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left(\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}} \right) = v'(x_i) + O(\Delta x^k). \quad (11)$$

为得到相应结果, 以下假设 $\Delta x_i = \Delta x$. 如果能找到函数 $h(x)$ 使得

$$v(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi \quad (12)$$

则

$$v'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \quad (13)$$

所以 $h(x)$ 就是我们要求的通量型函数, $h(x_{i+\frac{1}{2}})$ 和 $h(x_{i-\frac{1}{2}})$ 就是(11)中希望的 $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$ 和 $\hat{v}_{i-\frac{1}{2}}$, 即使 $h(x)$ 对于 $\hat{v}(x)$ 有 $O(\Delta x^k)$ 逼近也行。(光滑时 $h(x_{i+\frac{1}{2}}) - h(x_{i-\frac{1}{2}}) = O(\Delta x)$, 所以导数逼近有 k 阶精度)

因为 $v(x)$ 是 $h(x)$ 的 cell averages, 有了 cell averages $\{v_i\}$, 就可以类似于有限体积法那样重构逼近于 $h(x)$ 的多项式 $p_i(x)$ 。

由 $r + s + 1 = k$ 个连续点值所组成模板 x_{i-r}, \dots, x_{i+s} 在 $i + \frac{1}{2}$ 处的 ENO 重构值

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} v_{i-r+j} \quad (14)$$

3. Newton 差商

自适应模板: 选不含间断、最光滑的模板来构建多项式。

谁是最光滑的: 由Newton插值多项式的divided 差商概念决定。

原函数 $V(x)$ 的0阶差商:

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}] \equiv V(x_{i-\frac{1}{2}})$$

$j \geq 1$ 级差商:

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] \equiv \frac{V[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] - V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{3}{2}}]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i+j-\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

原函数的1级差商:

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] = \frac{V[x_{i+\frac{1}{2}}] - V[x_{i-\frac{1}{2}}]}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \bar{v}_i = \bar{v}[x_i] \quad (16)$$

因此,

$$V^p[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+p-\frac{1}{2}}] = \bar{v}^{p-1}[x_i, \dots, x_{i+p-1}] \quad (17)$$

差商度量光滑性：
光滑时，

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] = \frac{V^{(j)}(\xi)}{j!}, \quad x_{i-\frac{1}{2}} \leq \xi \leq x_{i+j-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

有间断时，

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] = O\left(\frac{1}{\Delta x^j}\right) \quad (19)$$

algorithm (ICASE 97 文)

v 的 k 阶精度重构，需要构建 V 的 k 阶多项式，这需要 V 的 k 级差商。

6.2 WENO 方法

第六章 双曲守恒律的其他高分辨率方法

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

ENO 的缺点:

- 1 因为round off误差会改变Stencil
- 2 因为1, 通量型重构函数会不光滑
- 3 达到 k 阶精度重构的所有候选模板一共涉及 $2k - 1$ 网格, 这足以构造 $(2k - 1)$ 阶精度的多项式。

WENO: 使用所有候选模板的线性组合。在所有候选模板

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1$$

对 $v(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的重构值 $\{v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}\}$ 基础上, 做一个凸组合以更高精度地逼近 $v(x_{i+\frac{1}{2}})$:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (20)$$

权 ω_r 的要求1: 稳定性及相容性要求

$$\omega_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1 \quad (21)$$

优化权 d_r :

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (22)$$

如果权满足要求2:

$$\omega_r = d_r + O(\Delta x^{k-1})$$

则有

$$v_{i+\frac{1}{2}}^W = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (23)$$

权要满足的第3个要求是任何包含间断的模板都被赋予几乎为零的权重, 即 $\omega_r \approx 0$.

Jiang 和Shu 选取符合上面三个条件的系数如下:

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r}, \quad \alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^p}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (24)$$

ϵ 是一个小量, 一般取 10^{-6} (与问题有相关, 影响精度), $p = 2$ if $k \leq 5$.

β_r 称为模板的光滑性度量因子, 一般取为模板 S_r 上重构多项式 $p_r(x)$ 的各级导数的rescaled L2模平方之和:

$$\beta_r = \sum_{m=1}^{k-1} \Delta x^{2m-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^m p_r(x)}{\partial x^m} \right)^2 dx, \quad (25)$$

1D WENO 重构的算法

给定 cell averages $\{\bar{v}_j\}$, 对于每个单元 I_i , 希望获得对边界值 $v_{i-\frac{1}{2}}^+$, $v_{i+\frac{1}{2}}^-$ 的迎风偏斜的具有 $(2k - 1)$ 阶精度的重构。

具体步骤见 ICASE 文。

1. 标量守恒律

有限体积的WENO 方法（半离散格式）

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (27)$$

其数值通量函数为

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h \left(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+ \right) \quad (28)$$

其中 $u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+$ 由ENO或WENO重构获得。

数值通量函数 h 满足

1. $h(a, b)$ is a Lipschitz continuous function in both arguments;
2. $h(a, b)$ is is a nondecreasing function in a and a nonincreasing function in b . Symbolically $h(\uparrow, \downarrow)$;
3. $h(a, b)$ is consistent with the physical flux f , that is, $h(a, a) = f(a)$.

计算数值通量可用Godunov 通量，近似Riemann解的各种通量(HLL, Roe, EO, LF)

Shu 推荐对于 $k \geq 3$, 用计算量小简单的LF通量。

对于有限差分法，需要重构网格半点的数值通量。有两种方法。

方法1 ENO-Roe: 设 $\bar{v}_i = f(u_i)$. 根据激波速度 $a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_{i+1})-f(u_i)}{u_{i+1}-u_i}$ 的正负号，决定是取 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}}^-$ 还是 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}}^+$.

方法2 ENO-FVS: 先将通量分裂为正负两部分

$$f = f^+ + f^-, \quad \frac{df^+}{du} \geq 0, \quad \frac{df^-}{du} \leq 0$$

然后定义“网格平均” $\bar{v}_i = f^+(u_i)$ 和 $\bar{v}_i = f^-(u_i)$ ，分别重构 $f_{i+\frac{1}{2}}^+$ 和 $f_{i+\frac{1}{2}}^-$ ，最后

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^+ + f_{i+\frac{1}{2}}^-$$

详见Shu ICASE 97 Procedure 2.3(FVM), 2.4 (FD-Roe), 2.5 (FD-FVS)

2. 守恒律组

(1) Component-wise 途径

(2) Characteristics-wise 途径(推荐)

下面给出Characteristics-wise 途径的方法。

设 $R = R(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}})$, $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}$ 一般为Roe平均。先变到特征分量

$$\bar{v}_j = R^{-1} \bar{u}_j \quad (29)$$

$$\bar{v}_j = R^{-1} f(u_j) \quad (30)$$

$$\bar{g}_j = R^{-1} f^\pm(u_j) \quad (31)$$

然后各个特征分量分别做ENO/WENO重构, 最后变回原来变量.

$$u_{i+\frac{1}{2}}^\pm = R v_{i+\frac{1}{2}}^\pm \quad (32)$$

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = R v_{i+\frac{1}{2}}^- \text{ or } R v_{i+\frac{1}{2}}^+ \quad (33)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^\pm = R g_{i+\frac{1}{2}}^\pm \quad (34)$$

见Shu ICASE procedure 2.8, 2.9, 2.10

上面的公式对应有三种方式: (1)有限体积, 重构左右变量; (2)有限差分-Roe, 根据特征速度的正负选择左重构或右重构的数值通量; (3)有限差分-FVS, 先将原来变量和物理通量变换到特征分量, 接着做每个特征分量的ENO/WENO-FVS型重构, 然后乘右特征矩阵, 得到原来通量。

6.3 DG (Discontinuous Galerkin) 方法

第六章 双曲守恒律的其他高分辨率方法

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

始于1973年，有许多种：Runge-Kutta DG (RKDG) for hyperbolic CLs, Local DG (LDG) for convection-diffusion and elliptic equations, STDG, ...

优点：

1. 高精度
2. discontinuous element \rightarrow 全局刚度矩阵对角化，可并行计算
3. 能处理间断
4. 边界处理简单
5. (可处理复杂几何区域)

1D标量守恒律的DG方法

第六章 双
曲守恒律的
其他高分辨
率方法

中国科学院
计算数学与
科学工程计
算研究所

我们针对下面简单的问题讨论RKDG方法。

$$u_t + f(u)_x = 0, \text{ in } (0, 1) \times (0, T) \quad (35)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in (0, 1) \quad (36)$$

假设上述方程满足周期边界条件。