

DG 方法

计算数学所

2010 年 1 月 19 日

§1 一维标量守恒律

在这一节中, 我们针对下面简单的问题讨论 RKDG 方法。

$$u_t + f(u)_x = 0, \text{ in } (0, 1) \times (0, T) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in (0, 1) \quad (2)$$

假设上面的方程满足周期边界条件。

§1.1 空间离散

为了得到空间离散, 我们按照下面的步骤做: 对于 $(0, 1)$ 的任意一个剖分 $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^N$, 对于 $j = 1, 2, \dots, N$, 我们记 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, $\Delta_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。此外, 我们定义 Δx 为 $\max_{1 \leq j \leq N} \Delta_j$ 。

我们要找到解 u 的一个近似解 u_h , 使得在每一个时间步 $t \in [0, T]$, u_h 属于有限维空间

$$V_h = V_h^k \equiv \{v \in L^1(0, 1) : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N\} \quad (3)$$

这里 $P^k(I)$ 表示 I 上次数不超过 k 的多项式空间。为了得到近似解 u_h , 我们首先写出方程的弱形式。将 (1) 和 (2) 两边同时乘以一个任意的光滑函数 v , 并在区间 I_j 上积分,

$$\int_{I_j} \partial_t u(x, t) v(x) dx + \int_{I_j} f(u(x, t))_x v(x) dx = 0,$$
$$\int_{I_j} u(x, 0) v(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v(x) dx$$

利用分部积分公式

$$\int_{I_j} f(u(x, t))_x v(x) dx = f(u(x, t)) v(x) \Big|_{x_{j-1/2}^-}^{x_{j+1/2}^+} - \int_{I_j} f(u(x, t)) \partial_x v(x) dx$$

可得

$$\int_{I_j} \partial_t u(x, t) v(x) dx - \int_{I_j} f(u(x, t)) \partial_x v(x) dx$$
$$+ f(u(x_{j+1/2}, t)) v(x_{j+1/2}^-) - f(u(x_{j-1/2}, t)) v(x_{j+1/2}^+) = 0, \quad (4)$$

$$\int_{I_j} u(x, 0) v(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v(x) dx \quad (5)$$

接下来, 我们将光滑函数 v 替换为属于有限元空间 V_h 的试探函数 v_h , 真解 u 用近似解 u_h 替换。由于函数 u_h 和 v 在结点 $x_{j+1/2}$ 处是间断的, 我们必须将非线性流通量 $f(u(x_{j+1/2}, t))$ 替换为数值流通量, 其值由点 $(x_{j+1/2}, t)$ 处的两个 u_h 的值来决定, 也就是说,

$$h(u)_{j+1/2}(t) = h(u(x_{j+1/2}^-, t), u(x_{j+1/2}^+, t)) \quad (6)$$

数值流通量的选取必须满足一定的要求。注意到无论有限元空间的形式如何，我们都可以使用同一种数值流通量。因而，利用下面的弱形式可以得到 DG 的数值解

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad \forall v_h \in P^k(I_j):$$

$$\int_{I_j} \partial_t u_h(x, t) v_h(x) dx - \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \partial_x v_h(x) dx + h(u_h)_{j+1/2}(t) v_h(x_{j+1/2}^-) - h(u_h)_{j-1/2}(t) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0, \quad (7)$$

$$\int_{I_j} u_h(x, 0) v_h(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_h(x) dx \quad (8)$$

为了完成近似解 u_h 的定义，现在剩下的就是定义数值流通量 h 。我们希望构造一种在单调格式上“摄动”的格式。基本思想是通过单调格式的“摄动”，希望能够得到一种高精度格式的同时保持格式的收敛性和稳定性。特别地，我们希望当 $k = 0$ 时，即当近似解 u_h 是一个分段常数时，DG 是一种单调格式。

当 $k = 0$ 时，对于 $x \in I_j$ ，我们可以得到

$$u_h(x, t) = u_j^0(t)$$

我们可以将弱形式 (7) 和 (8) 写为

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, N: \\ \partial_t u_j^0(t) + \{h(u_j^0(t), u_{j+1}^0(t)) - h(u_{j-1}^0(t), u_j^0(t))\} / \Delta_j = 0, \\ u_j^0(0) = \frac{1}{\Delta_j} \int_{I_j} u_0(x) dx \end{aligned}$$

众所周知，如果定义的数值流通量 $h(a, b)$ 满足 Lipschitz 连续，相容，单调，则上面的一阶格式就是一个单调格式。即数值流通量要满足

- (i) 局部 Lipschitz 连续且相容于 $f(u)$ 即 $h(u, u) = f(u)$
- (ii) 第一个变量的非减函数
- (iii) 第二个变量的非增函数

下面是一些比较著名的满足上面性质的数值流通量:

- (i) The Godunov flux:

$$h^G(u^-, u^+) = \begin{cases} \min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u), & \text{if } u^- \leq u^+ \\ \max_{u^- \geq u \geq u^+} f(u), & \text{if } u^- \geq u^+ \end{cases}$$

- (ii) The Engquist-Osher flux:

$$h^{EO}(u^-, u^+) = \int_0^{u^+} \min(f'(s), 0) ds + \int_0^{u^-} \max(f'(s), 0) ds + f(0)$$

- (iii) The Lax-Friedrichs flux:

$$h^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} [f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)]$$

$$\alpha = \max_{\inf u^0(x) \leq u \leq \sup u^0(x)} |f'(u)|$$

(iv) The local Lax-Friedrichs flux:

$$h^{LLF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2}[f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)]$$

$$\alpha = \max_{\min(u^-, u^+) \leq u \leq \max(u^-, u^+)} |f'(u)|$$

(v) The Roe flux with 'entropy fix':

$$h^R(u^-, u^+) = \begin{cases} f(u^-), & \text{if } f'(u) \geq 0 \text{ for } u \in [\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)] \\ f(u^+), & \text{if } f'(u) \leq 0 \text{ for } u \in [\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)] \\ \hat{f}^{LLF}(u^-, u^+), & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于流通量 h ，我们可以采用 Godunov 流通量 h^G ，因为它是产生最小人工粘性的数值流通量。local Lax-Friedrichs 流通量产生的人工粘性较 Godunov 流通量多，但是它们性能非常相似。当然，如果 f 很复杂，我们通常采用 Lax-Friedrichs 流通量。然而，数值试验表明，随着有限元空间维数 k 的增加，数值流通量的选取对于数值解的影响并不显著。

下面以 $k = 2$ 为例介绍 Discontinuous Galerkin Method 的具体计算步骤，可以选取如下一组多项式基函数 (多项式基函数形成的质量矩阵条件数较差，当 k 较大时应当选取正交的 Legendre 基函数)：

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_j}{\Delta x_j/2}, \quad \varphi_2(x) = \left(\frac{x - x_j}{\Delta x_j/2}\right)^2 - \frac{1}{3}, \quad \forall j = 1, \dots, N$$

其中 $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。

数值解 u_h 可以记为

$$u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x), \quad x \in I_j$$

将基函数和近似解带入弱形式 (7) 和 (8) 可以得到

$$\forall j = 1, \dots, N \text{ and } i = 0, \dots, k:$$

$$\int_{I_j} \partial_t \left(\sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x) \right) \varphi_i(x) dx - \int_{I_j} f \left(\sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x) \right) \partial_x \varphi_i(x) dx$$

$$+ h \left(\sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x) \right)_{j+1/2} \varphi_i(x_{j+1/2}^-) - h \left(\sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x) \right)_{j-1/2} \varphi_i(x_{j-1/2}^+) = 0,$$

$$\int_{I_j} \sum_{l=0}^k u_j^l(0) \varphi_l(x) \varphi_i(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_i(x) dx$$

记

$$\mathbf{v}(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$$

$$\mathbf{u}_j(t) = (u_j^0(t), u_j^1(t), u_j^2(t))^T$$

则

$$u_h(x, t) = \mathbf{v}^T(x) \mathbf{u}_j(t), \quad x \in I_j$$

所以弱形式 (7) 和 (8) 可记为向量表示

$$\forall j = 1, \dots, N:$$

$$\int_{I_j} \mathbf{v}(x) \mathbf{v}^T(x) \frac{d\mathbf{u}_j(t)}{dt} dx - \int_{I_j} f(\mathbf{v}^T(x) \mathbf{u}_j(t)) \partial_x \mathbf{v}(x) dx$$

$$+ h(\mathbf{v}^T(x) \mathbf{u}_j(t))_{j+1/2} \mathbf{v}(x_{j+1/2}^-) - h(\mathbf{v}^T(x) \mathbf{u}_j(t))_{j-1/2} \mathbf{v}(x_{j-1/2}^+) = 0,$$

$$\mathbf{u}_j(t=0) \int_{I_j} \mathbf{v}(x) \mathbf{v}^T(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) \mathbf{v}(x) dx.$$

容易得到

$$\int_{I_j} \mathbf{v}(x) \mathbf{v}^T(x) dx = \Delta x_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/45 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(x_{j+1/2}^-) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(x_{j-1/2}^+) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

第二项积分可以采用数值积分

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

或

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

通过对方程 (1) 和 (2) 进行 Discontinuous Galerkin Method 方法的离散, 我们得到了一个分量个数和有限元空间自由度相同的 ODE:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_j(t) = L_h(\mathbf{u}_j(t)), \quad \text{in } (0, T), \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_j|_{t=0} = \mathbf{u}_{0j} (\equiv P_{V_h} \mathbf{u}_0) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (10)$$

§1.2 The TVD-Runge-Kutta time discretization

为了求解常微分方程组, 我们采用 TVD Runge Kutta 时间离散方法

假定 $\{t^n\}_{n=0}^N$ 是 $[0, T]$ 的一个剖分, 记 $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n, n = 0, \dots, N-1$, 时间离散的算法如下:

- 赋值 $u_h^0 = u_{0h}$;
- 对于 $n = 0, \dots, N-1$, 按照如下步骤由 u_h^n 计算 u_h^{n+1} :

1. 赋值 $u_h^{(0)} = u_h^n$;
2. 对于任意 $i = 1, \dots, \mathcal{K}$, 计算中间函数值

$$u_h^{(i)} = \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}) \right\};$$

3. 赋值 $u_h^{n+1} = u_h^{(\mathcal{K})}$.

在 Cockburn 文中, $\mathcal{K} = k+1$, 这说明所用的 RK 方法的阶必须比有限元精度阶高一阶。(由稳定性所致)。

这种方法非常方便编程计算, 只需写一个计算 $L_h(u_h)$ 的子程序即可。一些 Runge-Kutta 时间离散参数参见下表:

order	α_{il}	β_{il}	$\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\}$
2	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$	1
3	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{matrix}$	1

§1.3 The generalized slope limiter (TVDM)

a. *The MUSCL limiter*

当采用分段线性函数近似解时, 也就是

$$v_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)v_{x,j}, \quad j = 1, \dots, N$$

可以使用 van Leer 提出的 MUSCL 限制器

$$\tilde{u}_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)m(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j})$$

b. *The less restrictive limiter*

也可以使用更少限制的限制器

$$\tilde{u}_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)m(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j/2}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j/2})$$

上式可以写成如下形式:

$$\tilde{u}_{j+1/2}^- = \bar{v}_j + m(v_{j+1/2}^- - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j) \quad (11)$$

$$\tilde{u}_{j-1/2}^+ = \bar{v}_j - m(\bar{v}_j - v_{j-1/2}^+, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j) \quad (12)$$

前面的 m 为 minmod 限制函数, 也可以采用 TVB 限制函数 \tilde{m} :

$$\tilde{m}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} a_1, & \text{if } |a_1| \leq M\Delta x^2 \\ m(a_1, \dots, a_m), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

c. *The P^k limiter*

当采用次数为 k 的多项式近似解时, 也就是说

$$v_h(x, t) = \sum_{l=0}^k v_j^l \varphi_l(x)$$

我们用一种简单的方法定义一个广义梯度限制器, 为了定义限制器, 我们首先定义 v_h 的 P^1 -part:

$$v^1(x, t) = \sum_{l=0}^1 \varphi_j^l \varphi_l(x)$$

我们定义限制器如下:

- 1) 用限制器计算 $\tilde{u}_{j+1/2}^-$ 和 $\tilde{u}_{j-1/2}^+$,
- 2) 如果 $\tilde{u}_{j+1/2}^- = v_{j+1/2}^-$ 和 $\tilde{u}_{j-1/2}^+ = v_{j-1/2}^+$, 令 $\tilde{u}_h|_{I_j} = v_h|_{I_j}$.
- 3) 如果不满足 2), 令 $\tilde{u}_h|_{I_j}$ 等于仅限制 P^1 -part 的值。

实际计算中, 将限制器应用 Runge-Kutta 每一步的中间变量。

§2 The RKDG method for multi-dimensional systems

§2.1 Introduction

这一节, 我们将 RKDG 方法推广到高维守恒律方程组:

$$u_t + \nabla f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (15)$$

及其周期边界条件。为了简单, 我们假设 Ω 是单位立方体。

§2.2 The general RKDG method

高维方程组的 RKDG 方法和一维标量的守恒率方程具有同样的求解步骤，也就是说

- 令 $u_h^0 = \Lambda \Pi_h P_{V_h}(u_0)$ (the L^2 -projection of $u_0(x)$ on the local space V_h and limiting);
- 对于 $n = 0, \dots, N-1$, 按照下面的步骤由 u_h^n 计算 u_h^{n+1} :

1. 令 $u_h^{(0)} = u_h^n$;
2. 对于 $i = 1, \dots, \mathcal{K}$ 计算中间函数:

$$u_h^{(i)} = \Lambda \Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}) \right\};$$

3. 令 $u_h^{n+1} = u_h^{(\mathcal{K})}$.

下面我们介绍 DG 空间离散的算子 L_h , 以及一般的限制器 $\Lambda \Pi_h$.

§2.2.1 The Discontinuous Galerkin space discretization

$$\frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \int_K \operatorname{div} f(u_h(t, x)) v_h(x) dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (16)$$

利用分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e f(u_h(t, x)) \cdot n_{e,K} v_h(x) d\Gamma \\ & - \int_K f(u_h(t, x)) \cdot \nabla v_h(x) dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

这里 $n_{e,K}$ 是边 e 的单位外法向矢量。注意到因为 u_h 在 $x \in e \in \partial K$ 是间断的, $f(u_h(t, x)) \cdot n_{e,K}$ 没有精确的定义。因而, 对于一维的情形, 我们将 $f(u_h(t, x)) \cdot n_{e,K}$ 用 $h_{e,K}(u_h(t, x^{int(K)}), u_h(t, x^{ext(K)}))$ 代替。函数 $h_{e,K}(\cdot, \cdot)$ 可用任何两元变量的、单调的、Lipschitz 连续的且和 $f(u) \cdot n_{e,K}$ 相容的数值通量。

利用这种方式, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}(t, x) v_h(x) d\Gamma \\ & - \int_K f(u_h(t, x)) \cdot \nabla v_h(x) dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

最后, 我们用求积法则进行积分, 可以采用下面的 Gauss 积分

$$\int_e h_{e,K}(t, x) v_h(x) d\Gamma \approx \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(t, x_{el}) v(x_{el}) |e| \quad (17)$$

$$\int_K f(u_h(t, x)) \cdot \nabla v_h(x) dx \approx \sum_{j=1}^M \omega_j f(u_h(t, x_{K_j})) \cdot \nabla v_h(x_{K_j}) |K| \quad (18)$$

因而, 我们最终得到, 对每一个单元 $K \in \mathcal{T}_h$, 弱形式为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(t, x_{el}) v(x_{el}) |e| \\ & - \sum_{j=1}^M \omega_j f(u_h(t, x_{K_j})) \cdot \nabla v_h(x_{K_j}) |K| = 0, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

这些方程可以被写成 ODE 的形式: $\frac{d}{dt}u_h = L_h(u_h)$ 。这里定义的算子 $L_h(u_h)$, 是对 $-\text{div}f(u)$ 的离散逼近.

§2.3 Algorithm and implementation details

这一小节我们给出算法的实现细节, 包括针对三角元和矩形元的分段线性和分段二次逼近的数值通量, 积分规则, 自由度, 通量和限制器.

§2.3.1 Fluxes

数值通量采用简单的 Lax-Friedrichs 通量

$$h_{e,K}(a,b) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(a) \cdot \mathbf{n}_{e,K} + \mathbf{f}(b) \cdot \mathbf{n}_{e,K} - \alpha_{e,K}(\mathbf{b} - \mathbf{a})]$$

数值粘性常数 $\alpha_{e,K}$ 应该和边 e 相邻单元上 Jacobian 矩阵 $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}(u_h(x,t)) \cdot \mathbf{e}_{n,K}$ 最大特征值的估计.

- 对于三角元, 我们利用局部 Lax-Friedrichs 途径
 - 令 $\alpha_{e,K}$ 是两个相邻单元中基于平均变量的 Jacobian 矩阵的最大特征值的较大者.
- 对于矩形元, 我们也采用局部 Lax-Friedrichs 途径
 - 类似.

§2.3.2 Quadrature rules

根据分析, 如果采用 P^k 方法, 对于元素边界的积分计算, 我们必须精确满足 $2k+1$ 阶多项式的积分, 对于元素内部的积分, 必须精确满足 $2k$ 多项式的积分, 这里我们讨论三角元和矩形元上 P^1 和 P^2 方法的积分.

§2.3.3 The rectangular elements

对于边界上的积分, 对于 P^1 方法, 我们采用两点高斯积分

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (19)$$

对于 P^2 方法, 我们采用三点高斯积分

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \approx \frac{5}{9}\left[g\left(-\frac{3}{5}\right) + g\left(\frac{3}{5}\right)\right] + \frac{8}{9}g(0), \quad ??? \quad (20)$$

对于元素内部的积分, 对于 P^1 方法, 我们采用 (19) 的张量积, 这将使元素内部有四个积分点, 但是为了节省存储空间, 我们 “recycle” (再利用) 元素边界积分点处已计算的流通量值.

因而, 为了积分 $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(x,y)dxdy$, 我们利用下面的积分规则:

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{4}\left[g\left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right. \\ &\quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right) \\ &\quad g\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad \left.g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) + g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right] \\ &\quad + 2g(0,0) \end{aligned}$$

§2.3.4 The triangular elements

对于边界上的积分，同四边形单元；对于元素内部积分， P^1 元用三个中点积分：

$$\approx \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 g(m_i). \quad (21)$$

P^2 元用七个 Gauss 点、具有 5 阶多项式精确的积分。

§2.3.5 Basis and degrees of freedom

我们强调基和自由度的选择不会影响算法，影响算法的包括试探空间 $V(h)$ 的选择，数值流通量，积分规则，限制器以及时间离散的方式。然而，合适的基和自由度的选择可以简化算法的实现和计算。

The rectangular elements

对于 P^1 元情形，我们利用下面的表达式描述在矩形单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 内的近似解 $u_h(x, y, t)$ ：

$$u_h(x, y, t) = \bar{u}(t) + u_x(t)\phi_i(x) + u_y(t)\psi_j(y) \quad (22)$$

这里

$$\phi_i(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x_i/2}, \quad \psi_j(y) = \frac{y - y_j}{\Delta y_j/2} \quad (23)$$

这里

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad \Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$$

随时间推进的自由度为

$$\bar{u}(t), \quad u_x(t), \quad u_y(t).$$

这里我们去掉了这些自由度应该带有的下标 ij ，这些下标说明了它们属于单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 。注意到基函数

$$1, \quad \phi_i(x), \quad \psi_j(y)$$

是正交的，因而局部的刚度矩阵是对角的：

$$M = \Delta x_i \Delta y_j \text{diag} \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

对于 P^2 的情形，在矩形单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 内近似解 $u_h(x, y, t)$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} u_h(x, y, t) = & \bar{u}(t) + u_x(t)\phi_i(x) + u_y(t)\psi_j(y) \\ & + u_{xy}(t)\phi_i(x)\psi_j(y) \\ & + u_{xx}(t) \left(\phi_i^2(x) - \frac{1}{3} \right) \\ & + u_{yy}(t) \left(\psi_j^2(y) - \frac{1}{3} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

这里 $\phi_i(x)$ 和 $\psi_j(y)$ 的定义同 (23)，随时间向前的自由度为

$$\bar{u}(t), \quad u_x(t), \quad u_y(t), \quad u_{xy}(t), \quad u_{xx}(t), \quad u_{yy}(t),$$

而且基函数

$$1, \quad \phi_i(x), \quad \psi_j(y), \quad \phi_x(x)\psi_j(y), \quad \phi_i^2(x) - \frac{1}{3}, \quad \psi_j(y) - \frac{1}{3}$$

也是正交的，因而局部刚度矩阵是对角的

$$M = \Delta x_i \Delta y_j \text{diag} \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{45}, \frac{4}{45} \right)$$

The triangular elements

P^1 元情形:

$$u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) \phi_i(x, y), \quad (25)$$

这里三个自由度 $u_i(t)$ 实际上为三边中点的数值解，基函数（形函数） $\phi_i(x, y)$ 为线性函数。刚度矩阵同样为对角阵

$$M = |K| \text{diag} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

P^2 元情形:

$$u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^6 u_i(t) \xi_i(x, y), \quad (26)$$

这里六个自由度 $u_i(t)$ 为三边中点和三个顶点的数值解。基函数为二次函数。但刚度矩阵不是对角阵了。

§2.3.6 Limiting

四边形成元

在 (22) 中对于 scaled “导数”（不是偏导数本身） u_x 和 u_y 的限制器，我们采用 differences of the means。对于标量方程， u_x 应当被限制为

$$\tilde{m}(u_x, \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}, \bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}), \quad (27)$$

这里函数 \tilde{m} 是一个 TVB 限制器，是对前面章节提出的 \minmod 函数 m 的修正。

这种 TVB 修正就是为了避免在光滑的极值点附近的不必要的限制，在那里 u_x 和 u_y 的量级分别是 $O(\Delta x^2)$ 和 $O(\Delta y^2)$ 阶的。对于 TVB 常数 M 的估计，其应是函数二阶导数项。一般地，数值结果对 M 的选择并不十分敏感，本文中通常选取 $M = 50$ 。

类似的， u_y 被限制为

$$\tilde{m}(u_y, \bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{ij}, \bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j-1}).$$

对于方程组，我们将对局部特征变量做限制，我们在单元 ij 上限制向量 \mathbf{u}_x 的方法如下：

- 找到特征矩阵 R 和 R^{-1} ，它们可以将基于单元 ij 平均值、 x 方向的 Jacobian 对角化：

$$R^{-1} \frac{\partial f_1(\bar{u}_{ij})}{\partial u} R = \Lambda$$

这里 Λ 是一个包含 Jacobian 矩阵的所有特征值的对角矩阵。注意到 R 的每一列都是 $\frac{\partial f_1(\bar{u}_{ij})}{\partial u}$ 的右特征向量，而 R^{-1} 的每一行都是 R^{-1} 的左特征向量。

- 将所有要限制的量变换到特征场。例如，将三个量 \mathbf{u}_{xij} , $\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}$ 和 $\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}$ 变换到特征场，只需将这三个向量左乘 R^{-1} 。
- 应用标量限制器 (27) 式于每个变换后的分量。
- 结果变回最初的变量，只须通过左乘 R 即可。

三角形元

(略)

§2.4 线性情况下的稳定性

数值试验表明, 用 k 阶, 必须用 $k + 1$ 阶 Runge Kutta 方法, 此时

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2k+1} \quad (28)$$

至今无严格证明。

§2.5 收敛性

(略)。

§2.6 数值结果

(略)。