DG 方法

计算数学所

2010 年 4 月 1 日

§1　一维标量守恒律

在这一节中，我们针对下面简单的标量守恒律问题讨论 RKDG 方法。

$$u_t + f(u)_x = 0,\ \text{in } (0,1)\times(0,T) \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in (0,1) \tag{2}$$

假设上面的方程满足周期边界条件。

§1.1　空间离散

为了得到空间离散，我们按照下面的步骤做：对于 $(0,1)$ 的任意一个剖分 $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^{N}$, 对于 $j = 1,2,\cdots,N$ ，我们记 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ ， $\Delta_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。此外，我们定义 Δx 为 $\max\limits_{1\le j\le N} \Delta_j$ 。

我们要找到解 u 的一个近似解 u_h ，使得在每一个时间步 $t\in[0,T]$ ， u_h 属于有限维空间

$$V_h = V_h^k \equiv \{v \in L^1(0,1):\ v|_{I_j} \in P^k(I_j),\ j=1,\cdots,N\} \tag{3}$$

这里 $P^k(I)$ 表示 I 上次数不超过 k 的多项式空间。为了得到近似解 u_h ，我们首先写出方程的弱形式。将 (1) 和 (2) 两边同时乘以一个任意的光滑函数 v ，并在区间 I_j 上积分，

$$\int_{I_j} \partial_t u(x,t)v(x)dx + \int_{I_j} f(u(x,t))_x v(x)dx = 0,$$

$$\int_{I_j} u(x,0)v(x)dx = \int_{I_j} u_0(x)v(x)dx$$

利用分部积分公式

$$\int_{I_j} f(u(x,t))_x v(x)dx = f(u(x,t))v(x)\Big|_{x_{j-\frac12}}^{x_{j+\frac12}} - \int_{I_j} f(u(x,t))\partial_x v(x)dx$$

可得

$$\begin{aligned}&\int_{I_j} \partial_t u(x,t)v(x)dx - \int_{I_j} f(u(x,t))\partial_x v(x)dx\\ &+f(u(x_{j+1/2},t))v(x_{j+1/2}^-) - f(u(x_{j-1/2},t))v(x_{j+1/2}^+) = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\int_{I_j} u(x,0)v(x)dx = \int_{I_j} u_0(x)v(x)dx \tag{5}$$

接下来，我们将光滑函数 v 替换为属于有限元空间 V_h 的试探函数 v_h ，真解 u 用近似解 u_h 替换。由于函数 u_h 和 v 在结点 $x_{j+1/2}$ 处是间断的，我们必须将非线性流通量 $f(u(x_{j+1/2},t))$ 替换为数值流通量，其值由点 $(x_{j+1/2},t)$ 处的两个 u_h 的值来决定，也就是说，

$$h(u)_{j+1/2}(t) = h(u(x_{j+1/2}^-,t), u(x_{j+1/2}^+,t)) \tag{6}$$

数值流通量的选取必须满足一定的要求。注意到无论有限元空间的形式如何，我们都可以使用同一种数值流通量。因而，利用下面的弱形式可以得到 DG 的数值解

$$\forall\ j=1,\cdots,N,\quad \forall\ v_h\in P^k(I_j):$$

$$\begin{aligned}&\int_{I_j}\partial_t u_h(x,t)v_h(x)dx-\int_{I_j}f(u_h(x,t))\partial_x v_h(x)dx\\&+h(u_h)_{j+1/2}(t)v_h(x_{j+1/2}^-)-h(u_h)_{j-1/2}(t)v_h(x_{j-1/2}^+)=0,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\int_{I_j}u_h(x,0)v_h(x)dx=\int_{I_j}u_0(x)v_h(x)dx\tag{8}$$

为了完成近似解 u_h 的定义，现在剩下的就是定义数值流通量 h 。我们希望构造一种在单调格式上“摄动”的格式。基本思想是通过对单调格式的“摄动”，希望能够得到一种高精度格式的同时保持格式的收敛性和稳定性。特别地，我们希望当 $k=0$ 时，即当近似解 u_h 是一个分段常数时， DG 是一种单调格式。

当 $k=0$ 时，对于 $x\in I_j$ ，我们可以得到

$$u_h(x,t)=u_j^0(t)$$

我们可以将弱形式 (7) 和 (8) 写为

$$\begin{aligned}&\forall\ j=1,\cdots,N:\\&\partial_t u_j^0(t)+\{h(u_j^0(t),u_{j+1}^0(t))-h(u_{j-1}^0(t),u_j^0(t))\}/\Delta_j=0,\\&u_j^0(0)=\frac{1}{\Delta_j}\int_{I_j}u_0(x)dx\end{aligned}$$

众所周知，如果定义的数值流通量 $h(a,b)$ 满足 Lipschitz 连续，相容，单调，则上面的一阶格式就是一个单调格式。即数值流通量要满足

(i) 局部 Lipschitz 连续且相容于 $f(u)$ 即 $h(u,u)=f(u)$

(ii) 第一个变量的非减函数

(iii) 第二个变量的非增函数

下面是一些比较著名的满足上面性质的数值流通量:

(i) The Godunov flux:

$$h^G(u^-,u^+)=\begin{cases}\min\limits_{u^-\le u\le u^+}f(u), & if\ u^-\le u^+\\ \max\limits_{u^-\ge u\ge u^+}f(u), & if\ u^-\ge u^+\end{cases}$$

(ii) The Engquist-Osher flux:

$$h^{EO}(u^-,u^+)=\int_0^{u^+}\min(f'(s),0)ds+\int_0^{u^-}\max(f'(s),0)ds+f(0)$$

(iii) The Lax-Friedrichs flux:

$$h^{LF}(u^-,u^+)=\frac{1}{2}[f(u^-)+f(u^+)-\alpha(u^+-u^-)]$$

$$\alpha=\max_{\inf u^0(x)\le u\le\sup u^0(x)}|f'(u)|$$

(iv) The local Lax-Friedrichs flux:

$$h^{LLF}(u^-,u^+) = \frac{1}{2}[f(u^-)+f(u^+)-\alpha(u^+-u^-)]$$
$$\alpha = \max_{\min(u^-,u^+)\le u\le \max(u^-,u^+)} |f'(u)|$$

(v) The Roe flux with 'entropy fix':

$$h^R(u^-,u^+) = \begin{cases} f(u^-), & \text{if } f'(u)\ge 0 \quad \text{for } u\in[\min(u^-,u^+),\max(u^-,u^+)] \\ f(u^+), & \text{if } f'(u)\le 0 \quad \text{for } u\in[\min(u^-,u^+),\max(u^-,u^+)] \\ \hat{f}^{LLF}(u^-,u^+), & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于流通量 h ，我们可以采用 Godunov 流通量 h^G ，因为它是产生最小人工粘性的数值流通量。local Lax-Friedrichs 流通量产生的人工粘性较 Godunov 流通量多，但是它们性能非常相似。当然，如果 f 很复杂，我们通常采用 Lax-Friedrichs 流通量。然而，数值试验表明，随着有限元空间维数 k 的增加，数值流通量的选取对于数值解的影响并不显著。

下面以 $k=2$ 为例介绍 Discontinous Galerkin Method 的具体计算步骤，可以选取如下一组多项式基函数 (多项式基函数形成的质量矩阵条件数较差，当 k 较大时应当选取正交的 Legendre 基函数)：

$$\varphi_0(x)=1, \quad \varphi_1(x)=\frac{x-x_j}{\Delta x_j/2}, \quad \varphi_2(x)=\left(\frac{x-x_j}{\Delta x_j/2}\right)^2-\frac{1}{3}, \quad \forall j=1,\cdots,N$$

其中 $\Delta x_j = x_{j+1/2}-x_{j-1/2}$ 。

数值解 u_h 可以记为

$$u_h(x,t)=\sum_{l=0}^{k} u_j^l(t)\varphi_l(x), \quad x\in I_j$$

将基函数和近似解带入弱形式 (7) 和 (8) 可以得到

$$\begin{aligned}
&\forall\ j=1,\cdots,N \text{ and } i=0,\cdots,k: \\
&\int_{I_j}\partial_t\Big(\sum_{l=0}^{k}u_j^l(t)\varphi_l(x)\Big)\varphi_i(x)dx-\int_{I_j}f\Big(\sum_{l=0}^{k}u_j^l(t)\varphi_l(x)\Big)\partial_x\varphi_i(x)dx \\
&+h\Big(\sum_{l=0}^{k}u_j^l(t)\varphi_l(x)\Big)_{j+1/2}\varphi_i(x_{j+1/2}^-)-h\Big(\sum_{l=0}^{k}u_j^l(t)\varphi_l(x)\Big)_{j-1/2}\varphi_i(x_{j-1/2}^+)=0, \\
&\int_{I_j}\sum_{l=0}^{k}u_j^l(0)\varphi_l(x)\varphi_i(x)dx=\int_{I_j}u_0(x)v_i(x)dx
\end{aligned}$$

记

$$\mathbf{v}(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x))^T$$
$$\mathbf{u}_j(t)=(u_j^0(t),u_j^1(t),u_j^2(t))^T$$

则

$$u_h(x,t)=\mathbf{v}^T(x)\mathbf{u}_j(t), \quad x\in I_j$$

所以弱形式 (7) 和 (8) 可记为向量表示

$$\begin{aligned}
&\forall\ j=1,\cdots,N: \\
&\int_{I_j}\mathbf{v}(x)\mathbf{v}^T(x)\frac{d\mathbf{u}_j(t)}{dt}dx-\int_{I_j}f(\mathbf{v}^T(x)\mathbf{u}_j(t))\partial_x\mathbf{v}(x)dx \\
&+h(\mathbf{v}^T(x)\mathbf{u}_j(t))_{j+1/2}\mathbf{v}(x_{j+1/2}^-)-h(\mathbf{v}^T(x)\mathbf{u}_j(t))_{j-1/2}\mathbf{v}(x_{j-1/2}^+)=0, \\
&\mathbf{u}_j(|_{t=0})\int_{I_j}\mathbf{v}(x)\mathbf{v}^T(x)dx=\int_{I_j}u_0(x)\mathbf{v}(x)dx.
\end{aligned}$$

容易得到

$$\text{局部刚度矩阵} \quad M = \int_{I_j} \mathbf{v}(x)\mathbf{v}^T(x)dx = \Delta x_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(x_{j+1/2}^-) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(x_{j-1/2}^+) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

第二项积分可以采用数值积分

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

或

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

通过对方程 (1) 和 (2) 进行 Discontinous Galerkin Method 方法的离散，我们得到了一个分量个数和有限元空间自由度相同的 ODE:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_j(t) = L_h(\mathbf{u}_j(t)), \quad \text{in } (0,T), \quad \forall j = 1, \cdots, N \tag{9}$$

$$\mathbf{u}_j(|_{t=0}) = \mathbf{u}_{0j}\,(\equiv P_{V_h}\mathbf{u}_0) \quad \forall\ j = 1, \cdots, N \tag{10}$$

§1.2 The TVD-Runge-Kutta time discretization

为了求解常微分方程组，我们采用 TVD Runge Kutta 时间离散方法

假定 $\{t^n\}_{n=0}^N$ 是 $[0,T]$ 的一个剖分，记 $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n, n = 0, ..., N-1$ ，时间离散的算法如下：

- 赋值 $u_h^0 = u_{0h}$ ；
- 对于 $n = 0, ..., N-1$ ，按照如下步骤由 u_h^n 计算 u_h^{n+1} ：

  1. 赋值 $u_h^{(0)} = u_h^n$ ；
  2. 对于 $i = 1, ..., \mathcal{K}$ ，计算中间函数值

  $$u_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1}\left[\alpha_{il}u_h^{(l)} + \beta_{il}\Delta t^n L_h(u_h^{(l)})\right];$$

  3. 赋值 $u_h^{n+1} = u_h^{(\mathcal{K})}$ 。

在 Cockburn 文中， $\mathcal{K} = k+1$ ，这保证 RK 方法的精度和有限元精度都是 $k+1$ 阶。（另一方面，采用 $k+1$ 阶的 RK 方法以保证稳定性）。

这种方法非常方便编程计算，只需写一个计算 $L_h(u_h)$ 的子程序即可。一些 Runge-Kutta 时间离散参数参见下表：

Runge-Kutta discretization parameters

order	α_{il}	β_{il}	$\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\}$
2	1 $\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	1 $0\quad\frac{1}{2}$	1
3	1 $\frac{3}{4}\quad\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}\quad 0\quad\frac{2}{3}$	1 $0\quad\frac{1}{4}$ $0\quad 0\quad\frac{2}{3}$	1

§1.3 The generalized slope limiter (TVDM)

a. The MUSCL limiter

当采用分段线性函数近似解时，也就是

$$v_h|_{I_j} = \overline{v}_j + (x - x_j)v_{x,j}, \qquad j = 1, \cdots, N$$

可以使用 van Leer 提出的 MUSCL 限制器

$$\tilde{u}_h|_{I_j} = \overline{v}_j + (x - x_j)m\left(v_{x,j}, \frac{\overline{v}_{j+1} - \overline{v}_j}{\Delta_j}, \frac{\overline{v}_j - \overline{v}_{j-1}}{\Delta_j}\right)$$

这里 m 为 minmod 限制函数：

$$m(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} s\min(|a_1|, |a_2|, |a_3|) & \text{if } s = sign(a_1) = sign(a_2) = sign(a_3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

b. The less restricitvie limiter

也可以使用更少限制的 Osher 限制器

$$\tilde{u}_h|_{I_j} = \overline{v}_j + (x - x_j)m\left(v_{x,j}, \frac{\overline{v}_{j+1} - \overline{v}_j}{\Delta_j/2}, \frac{\overline{v}_j - \overline{v}_{j-1}}{\Delta_j/2}\right)$$

上式可以写成如下形式 (限制记为 $\tilde{u}_h = \Lambda\Pi_h^1 v_h$ ，上标 1 表示作用于一次近似解)：

$$\tilde{u}^-_{j+1/2} = \overline{v}_j + m(v^-_{j+1/2} - \overline{v}_j, \overline{v}_j - \overline{v}_{j-1}, \overline{v}_{j+1} - \overline{v}_j) \tag{11}$$

$$\tilde{u}^+_{j-1/2} = \overline{v}_j - m(\overline{v}_j - v^+_{j-1/2}, \overline{v}_j - \overline{v}_{j-1}, \overline{v}_{j+1} - \overline{v}_j) \tag{12}$$

上式中也可以采用 TVB 限制函数 $\tilde{m}$ 以防止在极值点精度降低：

$$\tilde{m}(a_1, \cdots, a_m) = \begin{cases} a_1, & \text{if } |a_1| \le M\Delta x^2 \\ m(a_1, \cdots, a_m), & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

M 是极值点二阶导数的量级估计的上限。 M 越小， TVB 越接近 TVD 限制器， M 越大，耗散越小，但也越容易数值震荡。

c. The P^k limiter

当采用次数为 k 的多项式近似解时，也就是说

$$v_h(x, t) = \sum_{l=0}^{k} v_j^l \varphi_l(x)$$

我们用一种简单的方法定义一个广义梯度限制器。为此，我们首先定义 v_h 的 P^1-part ：

$$v^1(x, t) = \sum_{l=0}^{1} v_j^l \varphi_l(x)$$

我们定义限制器如下：

1) 用弱化限制器 $\Lambda\Pi_h^1$ 计算 $\tilde{u}^-_{j+1/2}$ 和 $\tilde{u}^+_{j-1/2}$,

2) 如果 $\tilde{u}^-_{j+1/2} = v^-_{j+1/2}$ 和 $\tilde{u}^+_{j-1/2} = v^+_{j-1/2}$ ，令 $\tilde{u}_h|_{I_j} = v_h|_{I_j}$ 。

3) 如果不满足 2) ，则令 $\tilde{u}_h|_{I_j}$ 等于用 $\Lambda\Pi_h^1$ 限制 P^1-part 的值。

实际计算中，将限制器应用 Runge-Kutta 每一步的中间变量。

§2 The RKDG method for multi-dimensional systems

§2.1 Introduction

这一节，我们将 RKDG 方法推广到高维守恒律方程组：

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,T) \tag{14}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \forall x \in \Omega \tag{15}$$

及其周期边界条件。为了简单，我们假设 Ω 是单位立方体。

§2.2 The general RKDG method

高维方程组的 RKDG 方法和一维标量的守恒率方程具有同样的求解步骤，也就是说

- 令 $u_h^0 = \Lambda\Pi_h\, P_{V_h}(u_0)$ (the L^2-projection of $u_0(x)$ on the local polynominal space V_h and limiting)；
- 对于 $n = 0, ..., N-1$ ，按照下面的步骤由 u_h^n 计算 u_h^{n+1} ：
  1. 令 $u_h^{(0)} = u_h^n$ ；
  2. 对于 $i = 1, ..., \mathcal{K}$ 计算中间函数：
  $$u_h^{(i)} = \Lambda\Pi_h \sum_{l=0}^{i-1} \left[\alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)})\right];$$
  3. 令 $u_h^{n+1} = u_h^{(\mathcal{K})}$.

下面我们介绍 DG 空间离散的算子 L_h ，以及一般的限制器 $\Lambda\Pi_h$.

§2.2.1 The Discontinuous Galerkin space discretization

$$\int_K \frac{du_h(t,x)}{dt} v_h(x)dx + \int_K \nabla \cdot \mathbf{f}(u_h(t,x)) v_h(x)dx = 0,\ \forall v_h \in V_h \tag{16}$$

利用分部积分，我们得到

$$\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx + \sum_{e\in\partial K}\int_e \mathbf{f}(u_h(t,x))\cdot \mathbf{n}_{e,K} v_h(x)d\Gamma$$
$$-\int_K \mathbf{f}(u_h(t,x))\cdot \nabla v_h(x)dx = 0, \qquad \forall v_h \in V_h$$

这里 $\mathbf{n}_{e,K}$ 是边 e 的单位外法向矢量。注意到因为 u_h 在 $x \in e \in \partial K$ 是间断的， $\mathbf{f}(u_h(t,x))\cdot \mathbf{n}_{e,K}$ 没有精确的定义。因而，对于一维的情形，我们将 $\mathbf{f}(u_h(t,x))\cdot \mathbf{n}_{e,K}$ 用函数 $h_{e,K}(u_h(t,x^{int(K)}), u_h(t,x^{ext(K)}))$ 代替。函数 $h_{e,K}(\cdot,\cdot)$ 可用任何两元变量的、单调的、 Lipschitz 连续的且和 $\mathbf{f}(u)\cdot \mathbf{n}_{e,K}$ 相容的数值通量。

利用这种方式，我们得到

$$\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx + \sum_{e\in\partial K}\int_e h_{e,K}(t,x) v_h(x)d\Gamma$$
$$-\int_K \mathbf{f}(u_h(t,x))\cdot \nabla v_h(x)dx = 0, \qquad \forall v_h \in V_h$$

最后，我们用求积法则进行积分，可以采用下面的 Gauss 积分

$$\int_e h_{e,K}(t,x)v_h(x)d\Gamma \approx \sum_{l=1}^{L} \omega_l h_{e,K}(t,x_{el})v(x_{el})|e| \tag{17}$$

$$\int_K \mathbf{f}(u_h(t,x)) \cdot \nabla v_h(x)dx \approx \sum_{j=1}^{M} \omega_j \mathbf{f}(u_h(t,x_{K_j})) \cdot \nabla v_h(x_{K_j})|K| \tag{18}$$

因而，我们最终得到，对每一个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ ，弱形式为

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx + \sum_{e\in\partial K}\sum_{l=1}^{L} \omega_l h_{e,K}(t,x_{el})v(x_{el})|e| \\
&-\sum_{j=1}^{M} \omega_j \mathbf{f}(u_h(t,x_{K_j})) \cdot \nabla v_h(x_{K_j})|K| = 0, \quad \forall v_h \in V_h
\end{aligned}$$

这些方程最终可以被写成 ODE 的形式： $\frac{d}{dt}U_h = L_h(U_h)$ 。这里定义的算子 $L_h(U_h)$ ，主要是对 $-\mathrm{div}\ \mathbf{f}(u)$ 的离散逼近.

§2.3 Algorithm and implementation details

这一小节我们给出算法的实现细节，包括针对三角元和矩形元的分段线性和分段二次逼近的数值通量，积分规则，自由度，通量和限制器.

§2.3.1 Fluxes

数值通量采用简单的 Lax-Friedrichs 通量

$$h_{e,K}(a,b) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(a)\cdot\mathbf{n}_{e,K} + \mathbf{f}(b)\cdot\mathbf{n}_{e,K} - \alpha_{e,K}(b-a)]$$

数值粘性系数 $\alpha_{e,K}$ 应该是和边 e 相邻单元上 Jacobian 矩阵 $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}(u_h(x,t))\cdot\mathbf{n}_{e,K}$ 的最大绝对值特征值在 $[a,b]$ 上的估计。

- 对于三角元，我们利用局部 Lax-Friedrichs 途径
  - 令 $\alpha_{e,K}$ 是两个相邻单元中基于平均变量的 Jacobian 矩阵的最大特征值的较大者。
- 对于矩形元，我们也采用局部 Lax-Friedrichs 途径
  - 类似。

§2.3.2 Quadrature rules

根据分析，如果采用 P^k 方法，对于元素边界的积分计算，我们必须精确满足 $2k+1$ 阶多项式的积分，对于元素内部的积分，必须精确满足 $2k$ 多项式的积分，这里我们讨论三角元和矩形元上 P^1 和 P^2 方法的积分。

§2.3.3 The rectangular elements

对于边界上的积分，对于 P^1 方法，我们采用两点高斯积分

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \tag{19}$$

对于 P^2 方法，我们采用三点高斯积分

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9}\left[g\left(-\frac{3}{5}\right)+g\left(\frac{3}{5}\right)\right]+\frac{8}{9}g(0), \tag{20}$$

对于元素内部的积分，对于 P^1 方法，我们采用 (19) 的张量积，这将使元素内部有四个积分点，但是为了节省存储空间，我们“ recycle ”（再利用）元素边界积分点处已计算的流通量值。

因而，为了积分 $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)dxdy$ ，我们利用下面的积分规则：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)dxdy \approx \; & \frac{1}{4}\left[g\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right. \\ & +g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-1\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-1\right) \\ & +g\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ & \left.+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)+g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)\right] \\ & +2g(0,0)\end{aligned}$$

§2.3.4 The triangular elements

对于边界上的积分，同四边形单元；对于元素内部积分， P^1 元用三个中点积分：

$$\int_K g(x)dxdy \approx \frac{|K|}{3}\sum_{i=1}^{3} g(m_i). \tag{21}$$

P^2 元用七个 Gauss 点、具有 5 阶多项式精确的积分。用 a^0 表示重心， a^i 表示顶点， a^{ij} 表示连接 a^i 和 a^j 的边的中点，面积分规则为

$$\int_K g(x)dxdy \approx \frac{|K|}{20}\sum_{i=1}^{3} g(a^i)+\frac{2|K|}{15}\sum_{1\le i<j\le 3}^{3} g(a^{ij})+\frac{9|K|}{20}g(a^0) \tag{22}$$

§2.3.5 Basis and degrees of freedom

我们强调基和自由度的选择不会影响算法，影响算法的包括试探空间 $V(h)$ 的选择，数值流通量，积分规则，限制器以及时间离散的方式。然而，合适的基和自由度的选择可以简化算法的实现和计算。

a. The rectangular elements

对于 P^1 元情形，我们利用下面的表达式描述在矩形单元 $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]\times[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}]$ 内的近似解 $u_h(x,y,t)$:

$$u_h(x,y,t)=\overline{u}(t)+u_x(t)\phi_i(x)+u_y(t)\psi_j(y) \tag{23}$$

这里

$$\phi_i(x)=\frac{x-x_i}{\Delta x_i/2}, \qquad \psi_j(y)=\frac{y-y_j}{\Delta y_j/2} \tag{24}$$

这里

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}, \qquad \Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}$$

随时间推进的自由度为

$$\overline{u}(t), \quad u_x(t), \quad u_y(t).$$

这里我们去掉了这些自由度应该带有的下标 ij , 这些下标说明了它们属于单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]\times[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$.

注意到基函数

$$1, \quad \phi_i(x), \quad \psi_j(y)$$

是正交的，因而局部的刚度矩阵是对角的：

$$M = \Delta x_i \Delta y_j diag\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

对于 P^2 的情形，在矩形单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]\times[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 内近似解 $u_h(x,y,t)$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} u_h(x,y,t) = \;& \overline{u}(t) + u_x(t)\phi_i(x) + u_y(t)\psi_j(y) \\ & + u_{xy}(t)\phi_i(x)\psi_j(y) \\ & + u_{xx}(t)\left(\phi_i^2(x) - \tfrac{1}{3}\right) \\ & + u_{yy}(t)\left(\psi_i^2(y) - \tfrac{1}{3}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

这里 $\phi_i(x)$ 和 $\psi_j(y)$ 的定义同 (24) ，随时间向前的自由度为

$$\overline{u}(t), \quad u_x(t), \quad u_y(t), \quad u_{xy}(t), \quad u_{xx}(t), \quad u_{yy}(t),$$

而且基函数

$$1, \quad \phi_i(x), \quad \psi_j(y), \quad \phi_x(x)\psi_j(y), \quad \phi_i^2(x) - \frac{1}{3}, \quad \psi_j(y) - \frac{1}{3}$$

也是正交的，因而局部刚度矩阵是对角的

$$M = \Delta x_i \Delta y_j diag\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{45}, \frac{4}{45}\right)$$

b. The triangular elements

P^1 元情形：

$$u_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t)\phi_i(x,y), \tag{26}$$

这里三个自由度 $u_i(t)$ 实际上为三边中点的数值解，基函数（形函数） $\phi_i(x,y)$ 为线性函数. 刚度矩阵同样为对角阵

$$M = |K| diag(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

.

P^2 元情形：

$$u_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{6} u_i(t)\xi_i(x,y), \tag{27}$$

这里六个自由度 $u_i(t)$ 为三边中点和三个顶点的数值解。基函数为二次函数。但刚度矩阵不是对角阵了。

§2.3.6 Limiting

我们希望构建的 slope limiting 算子 $\Lambda\Pi_h$ 作用于分段线性函数 u_h 上满足下面的准则：

1. 精确性，如果 u_h 是线性的，那么 $\Lambda\Pi_h u_h = u_h$ （说法有错？）
2. 物质守恒性：对每一个单元 K ，限制前后的单元平均值不变。
3. 斜率受限：限制后函数的斜率不大于未限制始函数的斜率。

Cockburn-Shu 假设：数值振荡只出现在线性近似部分，这意味着 $v_h^1 \neq \Lambda\Pi_h^1(v_h^1)$ 。

限制的一般过程如下：

(i) 计算 $r_h|_K = \Lambda\Pi_h^1(v_h^1|_K)$,

(ii) if $r_h|_K = v_h^1|_K$ （类似 1D 中的步骤 2，但 $v_{j+\frac{1}{2}}^-$ 要取边上平均值而非点值）， set $\tilde{u}_h|_K = v_h|_K$,

(iii) if $r_h|_K \neq v_h^1|_K$, set $\tilde{u}_h|_K = r_h|_K$.

a. 四边形元

在 (23) 中对于 u_x 和 u_y（ $=$ 斜率 $\times \frac{\Delta x}{2}$ ）的限制器，我们采用 differences of the means 。对于标量方程， u_x 应当被限制为

$$\widetilde{m}(u_x, \overline{u}_{i+1,j} - \overline{u}_{ij}, \overline{u}_{ij} - \overline{u}_{i-1,j}), \tag{28}$$

这里函数 $\widetilde{m}$ 是一个 TVB 限制器，是对前面章节提出的 $minmod$ 函数 m 的修正。

这种 TVB 修正是为了避免在光滑的极值点附近的不必要的限制，在那里 u_x 和 u_y 的量级分别是 $O(\Delta x^2)$ 和 $\Delta(y^2)$ 阶的。对于 TVB 常数 M 的估计，其应是函数二阶导数项。一般地，数值结果对 M 的选择并不十分敏感，本文中通常选取 $M = 50$ 。

类似的， u_y 被限制为

$$\widetilde{m}(u_y, \overline{u}_{i,j+1} - \overline{u}_{ij}, \overline{u}_{ij} - \overline{u}_{i,j-1}).$$

对于方程组，我们将对局部特征变量做限制，我们在单元 ij 上限制向量 $\mathbf{u_x}$ 的方法如下：

- 找到特征矩阵 R 和 R^{-1} ，它们可以将基于单元 ij 平均值、 x 方向的 Jacobian 对角化：

  $$R^{-1}\frac{\partial f_1(\overline{u}_{ij})}{\partial u}R = \Lambda$$

  这里 Λ 是一个包含 Jacobian 矩阵 $\frac{\partial f_1(\overline{u}_{ij})}{\partial u}$ 的所有特征值的对角矩阵。注意到 R 的每一列都是 Jacobian 矩阵的右特征向量，而 R^{-1} 的每一行都是左特征向量。

- 将所有要限制的量变换到特征场。例如，将三个量 $\mathbf{u_{xij}}, \overline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i+1,j}} - \overline{\mathbf{u}}_{\mathbf{ij}}$ 和 $\overline{\mathbf{u}}_{ij} - \overline{\mathbf{u}}_{i-1,j}$ 变换到特征场，只需将这三个向量左乘 R^{-1} 。

- 应用标量斜率限制器 (28) 式于每个变换后的分量。

- 结果变回最初的变量，只须通过左乘 R 即可。

b. 三角形元

设 $m_i, i = 1,2,3$ 为三角形单元 K_0 的三条边中点，（在何条件下，原文未说）则有

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0) \tag{29}$$

其中 α_1, α_2 为两个依赖于 m_1 和四个单元几何的非负系数。

对于任何线性函数 u_h, 边中点处和重心处的值之差可表示成两个重心处值之差（其等于网格平均值之差）的凸组合：

$$\tilde{u}_h(m_1, K_0) \equiv u_h(m_1) - u_h(b_0) = \alpha_1(\overline{u}_{K_1} - \overline{u}_{K_0}) + \alpha_2(\overline{u}_{K_2} - \overline{u}_{K_0}) \equiv \Delta\overline{u}(m_1, K_0)$$

上式中 $\tilde{u}_h$ 是本单元边中点的值和重心的值之差， $\Delta\overline{u}$ 为相邻单元上平均值之差的凸组合（对于二次以上多项式函数，仍然等于重心处值之差的凸组合）。下面描述对线性部分的限制器。对于分片线性函数

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{3}(u_h(m_i) - \overline{u}_{K_0} + \overline{u}_{K_0})\varphi_i(x,y) = \overline{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^{3}\tilde{u}_h(m_i, K_0)\varphi_i(x,y) \tag{30}$$

为计算 $\Lambda\Pi_h u_h$, 先计算

$$\Delta_i = \overline{m}\left(\tilde{u}_h(m_i, K_0), \nu\Delta\overline{u}(m_i, K_0)\right) \tag{31}$$

其中 $\overline{m}$ 是修正的 TVB 限制器函数 (使前面介绍的 $\tilde{m}$ 中无第三个变量)，ν 是辅助参数，我们取为 2(注：似乎比 Osher 限制器还弱)。如果 $\sum_{i=1}^{3} \Delta_i = 0$ ，则置

$$\Lambda\Pi_h u_h(x,y) = \overline{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^{3} \Delta_i \varphi_i(x,y). \tag{32}$$

当 $\nu > 1$ 时， $\Delta_i = \tilde{u}_h(m_i, K_0)$, 相当于没有限制，保持了精度。

如果 $\sum_{i=1}^{3} \Delta_i \neq 0$ ，我们计算

$$pos = \sum_{i=1}^{3} \max(0, \Delta_i), \qquad neg = \sum_{i=1}^{3} \max(0, -\Delta_i)$$

令

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \qquad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right)$$

然后我们置

$$\Lambda\Pi_h u_h(x,y) = \overline{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^{3} \hat{\Delta}_i \varphi_i(x,y), \tag{33}$$

其中 $\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i)$.

对方程组，仿照矩形单元的情况，对特征变量做限制 (因为这比对分量做限制的计算效果好)。做法上唯一不同的是，这里的 Jacobian 矩阵是沿着重心到边中点的方向：

$$J = \frac{\partial \mathbf{f}(\overline{u}_{K_0})}{\partial u} \cdot \frac{\mathbf{m_i} - \mathbf{b_0}}{|\mathbf{m_i} - \mathbf{b_0}|}$$

计算其左右特征矩阵，乘 R^{-1} 乘以这些向量，将 $\tilde{u}_h(m_i, K_0)$ 和 $\overline{\Delta}u(m_i, K_0)$ 变到特征场，用 (31) 做限制，然后乘右特征向量矩阵 R ，变回原始变量场。

(**变量值取重心的值，方向取沿重心 - 边中点方向的特征矩阵。**)

§2.4 线性情况下的稳定性

数值试验表明，用 k 次元，必须用 $k+1$ 阶 Runge Kutta 方法以保证相同的 $k+1$ 阶精度，以及保证低次元的稳定性 (但 RK 级数高到 3 就能保证任意阶精度有限元的如下稳定性限制)，此时

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2k+1} \tag{34}$$

对 $k \geq 2$ 至今无严格证明。

§2.5 收敛性

(略)。

§2.6 数值结果

(略)。