

一种治愈强激波数值不稳定性的混合方法^{*}

胡立军, 袁 礼

(中国科学院 数学与系统科学研究院 计算数学所;
科学与工程计算国家重点实验室(中国科学院), 北京 100190)

摘要: HLLC(Harten-Lax-Leer-contact)格式是一种高分辨率格式,能够准确捕捉激波、接触间断和稀疏波.但是使用HLLC格式计算多维问题时,在强激波附近会出现激波不稳定现象,FORCE(first-order centred)格式在强激波附近表现出很好的稳定性,并且其数值耗散比HLL(Harten-Lax-Leer)格式小.分析了HLLC格式和FORCE格式在特定流动条件下的稳定性,构造了HLLC-FORCE混合格式并且进一步结合开关函数来消除HLLC格式的激波不稳定现象.数值试验表明新构造的混合格式不仅能够消除HLLC格式的激波不稳定现象,还最大程度地保留HLLC格式高分辨率的优点.

关键词: 数值激波不稳定性; 稳定性分析; HLLC-FORCE混合格式; MUSCL重构

中图分类号: O354; O241.82 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.05.004

引 言

HLLC近似Riemann(黎曼)解法器是非常流行的激波捕捉方法,广泛应用于可压缩高速流的计算.然而,使用HLLC格式计算多维问题时,不少研究人员都报道了它所存在的缺陷. Peery等^[1]发现,计算二维钝体绕流时,某些格式会产生“红斑”(carbuncle)现象,这其中就包括了HLLC格式.Quirk^[2]指出:用HLLC格式计算某些多维流动算例时会导致非物理现象的产生,其中包括膨胀激波、负内能、慢行激波、carbuncle现象、双Mach(马赫)杆和奇偶失联现象.这些现象统称为数值激波不稳定现象,探究这些现象产生的根源并找到相应的治愈方法,对于流体力学数值计算研究具有深刻的意义.

在探究根源方面,Quirk^[2]表明,如果压力的扰动影响到了密度,使用该格式计算会出现不稳定现象.Liou^[3]认为,数值格式的压力项反馈到了质量方程的数值通量,是造成格式不稳定性的根源.Xu^[4]在Liou^[3]的基础上更近了一步,他认为激波面切向耗散的消失也是影响格式不稳定性的主要原因之一,并指出数值激波结构中的亚声速部分是不稳定现象产生的区域.此外,Dumbser等^[5]表明,数值激波的结构影响了格式的不稳定性,并且认为不稳定性源于超声速区域.

^{*} 收稿日期: 2014-07-04; 修订日期: 2015-01-13

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2010CB731505);国家自然科学基金(面上项目)(10972230);创新群体项目(11321061);国际(地区)合作与交流项目(11261160486)

作者简介: 胡立军(1985—),男,湖南人,博士生(E-mail: hulijun@lsec.cc.ac.cn);
袁礼(1963—),男,重庆人,研究员,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: lyuan@lsec.cc.ac.cn).

在治愈数值激波不稳定性方面, Moschetta 等^[6]认为, 修改与剪切波对应的特征值可以有效改善不稳定性. Lin^[7]基于压力梯度构造了一个修正熵函数来治愈激波不稳定性. Quirk^[2]和 Pandolfi 等^[8]注意到, 能够精确分辨接触间断和剪切波的数值格式, 在强激波附近都会遭遇不稳定性, 并且提出了一种组合通量方法, 使得在激波附近使用耗散格式, 例如 HLLE 格式.

利用组合格式改变耗散机制而不是依靠单纯增加常规的“网格对齐”(grid-aligned)类方法的耗散水平, 可以有效地控制激波不稳定性. 例如 Ren^[9]给出了旋转 Roe Riemann 解法器, 刘友琼等^[10]给出了旋转混合型格式, 但在两个相互正交的方向上求解 Riemann 问题时对初始左右状态的定义有一定近似, 计算量也较大. Kim 等^[11]给出了将 HLLC 格式和 HLL 格式相结合的混合方法, 但是并没有分析激波不稳定现象产生的原因, 因而在组合时增加了不必要的数值粘性.

本文第一作者在文献[12]中分析了二维浅水波方程的数值激波在特定流动和扰动形式下的线性不稳定性. 本文进一步用矩阵分析法分析了 Euler(欧拉)方程的 HLLC 格式产生激波不稳定现象的原因, 并且构造了一种新的混合方法来治愈该格式的这种不稳定性. 与旋转格式^[9-10]和其它混合通量格式^[11-13]相比, 本文构造的混合方法有几点不同: 第一, 用耗散更小的 FORCE 格式^[14]来代替常用的 HLL 格式; 第二, 仅仅在计算网格交界面的质量通量和切向动量通量中将 HLLC 和 FORCE 进行混合, 其余通量分量的计算依然使用 HLLC 格式; 第三, 通过定义开关函数, 只在强激波附近的激波横向才使用混合格式, 而在其它方向、其它无激波区域依然使用 HLLC 格式. 其中第一点和第三点是对文献[12]的进一步发展. 数值试验表明混合格式结合开关函数使用不仅可以消除 HLLC 格式的激波不稳定现象, 而且可以最大可能地保留 HLLC 格式的高分辨率.

1 控制方程组

考虑二维 Euler 方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix},$$

ρ 为密度, u 和 v 分别是 x 方向和 y 方向的速度, $E = \rho(u^2 + v^2)/2 + \rho e$ 为总能; 状态方程为 $p = (\gamma - 1)\rho e$, 这里 e 为内能, $\gamma = 1.4$.

在规则四边形控制体 $\Omega_{i,j}$ 上用有限体积法离散方程组(1), 可得半离散方程:

$$\left(|\Omega| \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{i,j} + (\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}) + (\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$, $\mathbf{G}_{i,j+1/2}$ 分别是 x 方向和 y 方向的数值通量.

2 稳定性分析

2.1 线性稳定性分析

设初始时刻流体沿着 x 方向从左向右运动, 速度 $u_0 = Ma \cdot a_0$, Ma 为 Mach 数, a_0 为声速. 流

体沿 y 方向速度为 0. 设网格 $\Omega_{i,j}$ 上的物理量 $\mathbf{W}_{i,j}^n = \delta \mathbf{W}_{i,j}^n + \mathbf{W}_0$, 其中 $\mathbf{W}_0 = (\rho_0, u_0, 0, p_0)^T$ 为定常状态, $\delta \mathbf{W}_{i,j}^n$ 为其扰动量.

时间离散采用一阶向前差分, 则半离散方程(2)可以改写成全离散格式:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \sigma_x (\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}) - \sigma_y (\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}), \quad (3)$$

其中 $\sigma_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \sigma_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}.$

当扰动在 x 或 y 方向为对称奇偶扰动分布时, 采用线性展开, 扰动量也仍然会按照奇偶次序发展. 在这种扰动下, 线性化后可以得到

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{W}_{i,j}^n, \quad \mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2} = \hat{\mathbf{G}} \cdot \delta \mathbf{W}_{i,j}^n.$$

将以上线性化的结果, 代入全离散格式(3)可以得到

$$\delta \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \delta \mathbf{U}_{i,j}^n - (\sigma_x \hat{\mathbf{F}} + \sigma_y \hat{\mathbf{G}}) \cdot \delta \mathbf{W}_{i,j}^n, \quad (4)$$

其中, $\delta \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{U}_0, \delta \mathbf{U}_{i,j}^n = \mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_0, \hat{\mathbf{F}}$ 和 $\hat{\mathbf{G}}$ 是取值于 $\mathbf{W}_0$ 的线性化矩阵. 由于守恒量扰动与物理量扰动之间的关系为

$$\delta \mathbf{U}_{i,j}^n = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \right)_0 \delta \mathbf{W}_{i,j}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{u_0^2}{2} & u_0 \rho_0 & 0 & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \delta \mathbf{W}_{i,j}^n = \hat{\mathbf{B}} \delta \mathbf{W}_{i,j}^n, \quad (5)$$

从而可以得到物理扰动随着时间的发展方程:

$$\delta \mathbf{W}_{i,j}^{n+1} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\sigma_x \hat{\mathbf{F}} + \sigma_y \hat{\mathbf{G}})) \cdot \delta \mathbf{W}_{i,j}^n = \hat{\mathbf{A}} \delta \mathbf{W}_{i,j}^n. \quad (6)$$

增广矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的谱半径定义为 $\rho_{\hat{\mathbf{A}}}$. 当 $\rho_{\hat{\mathbf{A}}} < 1$ 时, 格式严格稳定; 当 $\rho_{\hat{\mathbf{A}}} = 1$ 时, 格式临界稳定; 当 $\rho_{\hat{\mathbf{A}}} > 1$ 时, 格式不稳定. 下面讨论 HLLC 格式和 FORCE 格式在两种扰动情况下, 增广矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的特征值表达式.

2.1.1 x -向扰动

假设物理量在 x 方向存在奇偶对称扰动, 即 $\delta \mathbf{W}_{i-1,j}^n = -\delta \mathbf{W}_{i,j}^n = \delta \mathbf{W}_{i+1,j}^n$, 在 y 方向物理量保持一致. 此时增广矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 只取决于 x 方向的 $\hat{\mathbf{F}}$. 可分亚声速和超声速两种情形.

在亚声速 ($u_0 < a_0$) 情形下:

$$\begin{cases} \rho_1^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x a_0, \rho_2^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 + u_0), \\ \rho_3^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x a_0, \rho_4^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 - u_0); \\ \rho_1^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_2^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 + u_0), \\ \rho_3^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_4^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 - u_0). \end{cases} \quad (7)$$

在超声速 ($u_0 > a_0$) 情形下:

$$\begin{cases} \rho_1^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_2^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 + u_0), \\ \rho_3^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_4^{x,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_x (u_0 - a_0); \\ \rho_1^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_2^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x (a_0 + u_0), \\ \rho_3^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x u_0, \rho_4^{x,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_x (u_0 - a_0). \end{cases} \quad (8)$$

可以看出, 在一定的步长限制条件下, HLLC 格式和 FORCE 格式都是严格稳定的.

2.1.2 y -向扰动

假设物理量在 y 方向存在对称奇偶扰动, 即 $\delta W_{i,j-1}^n = -\delta W_{i,j}^n = \delta W_{i,j+1}^n$, 在 x 方向物理量保持一致, 此时增广矩阵 $\hat{A}$ 只取决于 y 方向的 $\hat{G}$. 但由于 y 向定常态速度 v_0 为 0, 所以只有亚声速一种情形:

$$\begin{cases} \rho_1^{y,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_y a_0, \rho_2^{y,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_y a_0, \\ \rho_3^{y,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_y a_0, \rho_4^{y,\text{FORCE}} = 1 - 2\sigma_y a_0; \\ \rho_1^{y,\text{HLLC}} = 1, \rho_2^{y,\text{HLLC}} = 1, \\ \rho_3^{y,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_y a_0, \rho_4^{y,\text{HLLC}} = 1 - 2\sigma_y a_0. \end{cases} \quad (9)$$

可以看出, 在一定的步长限制条件下, FORCE 格式严格稳定, 而 HLLC 格式却有两个临界特征值 1. 详细地分析可发现: 这两个特征值分别对应着密度扰动量 $\delta\rho$ 和网格 y 界面的切向速度扰动量 δu 的发展^[15]. 由于假设主流方向沿 x 方向, 因此如果流场中有激波, 则激波只能出现在主流方向, y 方向是激波的横向. 我们猜想, 正是由于 HLLC 格式的这两个临界特征值的存在, 使得激波横向的扰动没有得到有效的耗散, 从而会导致激波不稳定现象的出现.

2.2 矩阵分析法

进一步地, 使用文献[5]中的矩阵分析法来对 HLLC 格式和 FORCE 格式进行稳定性分析. 计算区域为 11×11 的正方形网格, 仍假设初始流动平行于 x 方向, 初始时刻在第 6 和第 7 列网格线上有一个稳态激波, Mach 数 $Ma = 20$. 波前初值

$$U_0 = \left(1, 1, 0, \frac{1}{\gamma(\gamma-1)Ma^2} + \frac{1}{2} \right)^T,$$

波后值 U_1 由 Rankine-Hugoniot 关系式确定.

将所有网格的扰动量随时间增长的方程(6)写成矩阵形式的 ODE 方程:

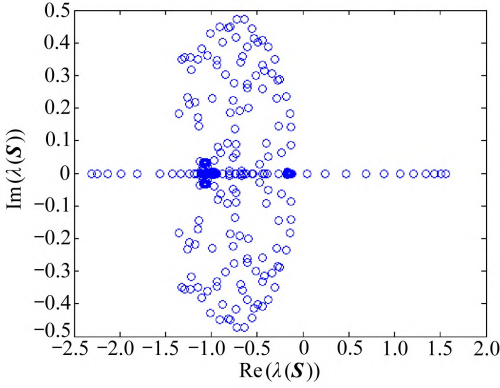
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta W_0 \\ \delta W_1 \\ \vdots \\ \delta W_q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \delta W_0 \\ \delta W_1 \\ \vdots \\ \delta W_q \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中 $q = 11 \times 11 = 121$, 由于每个网格点有 4 个分量, 从而 S 是 484×484 的方阵. 由于 S 是常系数矩阵, 解析求解上面的 ODE 方程, 可以得到

$$\begin{pmatrix} \delta W_0 \\ \delta W_1 \\ \vdots \\ \delta W_q \end{pmatrix} = e^{St} \begin{pmatrix} \delta W_0 \\ \delta W_1 \\ \vdots \\ \delta W_q \end{pmatrix}_{t=0}. \quad (11)$$

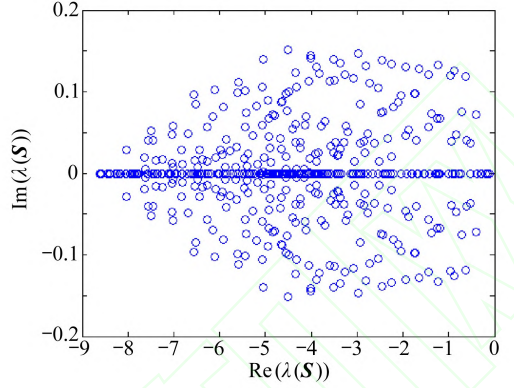
定义矩阵 S 的特征值为 $\lambda(S)$, $\text{Re}(\lambda(S))$ 表示其实部. 如果 $\max(\text{Re}(\lambda(S))) < 0$, 那么扰动的增长是有界的, 在计算中使用 MATLAB 标准函数来计算特征值. 得到 HLLC(图 1(a)) 和 FORCE(图 1(b)) 格式的特征值在复平面的分布, 这意味着全用 HLLC 计算含激波问题时, 数值扰动可能被放大. 为了与 2.1 小节的分析一致, 进一步考虑两种混合方式. 首先, 使用 HLLC 计算 x 方向通量, y 方向通量由 FORCE 来计算, 结果见图 2(a), 可见这种混合方式是稳定的. 然后交换两种格式的顺序, x 方向通量用 FORCE, y 方向通量用 HLLC, 结果见图 2(b), 可见这种混合方式是不稳定的.

从而证实了 2.1.2 小节后的猜想:在 y 方向(实质是激波的横向)应用 HLLC 格式不能有效抑制数值扰动的增长,从而导致了激波不稳定现象的出现,这与 Kim 等^[11]的结论一致。



(a) HLLC: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = 1.556\ 4$, 不稳定

(a) HLLC: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = 1.556\ 4$, unstable

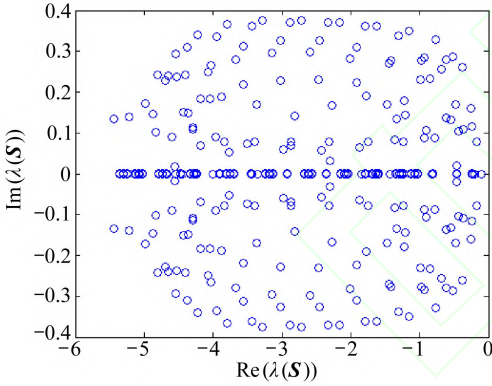


(b) FORCE: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = -0.105\ 7$, 稳定

(b) FORCE: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = -0.105\ 7$, stable

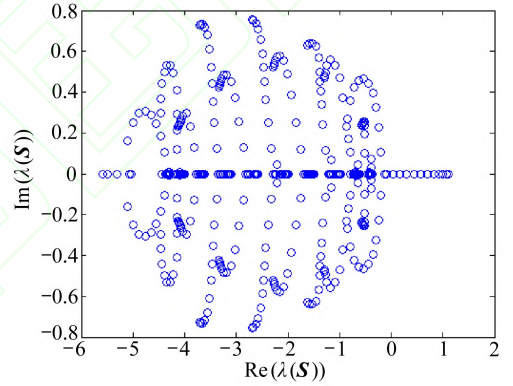
图 1 特征值在复平面内的分布

Fig. 1 Distribution of eigenvalues in the complex plane, for individual schemes



(a) x -HLLC + y -FORCE: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = -0.102\ 7$, 稳定

(a) x -HLLC + y -FORCE: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = -0.102\ 7$, stable



(b) x -FORCE + y -HLLC: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = 1.099\ 1$, 不稳定

(b) x -FORCE + y -HLLC: $\max(\operatorname{Re}(\lambda(S))) = 1.099\ 1$, unstable

图 2 特征值在复平面内的分布

Fig. 2 Distribution of eigenvalues in the complex plane, for hybrid schemes

3 二维 Euler 方程的混合型格式

3.1 混合格式的构造

通过混合 HLLC 和 FORCE 格式的方法来修改 HLLC 格式所对应的扰动增广矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的特征值,使其达到严格稳定.由 2.1 小节线性稳定性分析式(9)可知,不需要对其进行全面修改,只需要通过修改 $\hat{\mathbf{A}}$ 的两个临界特征值所对应的网格界面质量通量和切向动量通量的计算^[15],使其对应的数值粘性增加来实现.以规则四边形网格 y 方向的数值通量 $\mathbf{G}$ 为例,只需修改其第 1 个和第 2 个分量,使其数值粘性增加,从而达到严格稳定.因此,网格 y 向界面的混合格式可表示成

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\text{HLLC-FORCE}}(1) = \omega \mathbf{G}_{\text{HLLC}}(1) + (1 - \omega) \mathbf{G}_{\text{FORCE}}(1), \\ \mathbf{G}_{\text{HLLC-FORCE}}(2) = \omega \mathbf{G}_{\text{HLLC}}(2) + (1 - \omega) \mathbf{G}_{\text{FORCE}}(2), \\ \mathbf{G}_{\text{HLLC-FORCE}}(3) = \mathbf{G}_{\text{HLLC}}(3), \\ \mathbf{G}_{\text{HLLC-FORCE}}(4) = \mathbf{G}_{\text{HLLC}}(4), \end{cases} \quad (12)$$

其中, 加权系数

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$\alpha_1 = |\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}|$, $\alpha_2 = \sqrt{1 - \alpha_1^2}$, $\mathbf{n}_s$ 为激波面法向。可见, 当激波面和网格面一致时, 混合格式取 HLLC 格式; 当激波面和网格面垂直时, FORCE 格式的权重达到最大值 0.5。

数值计算中, 使用文献[9, 13]中的方法来近似估计激波面法向:

$$\mathbf{n}_s = \begin{cases} \frac{\Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j}}{\|\Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j}\|}, & \|\Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j}\| > \varepsilon, \\ \mathbf{n}, & \|\Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j}\| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\varepsilon = 10^{-4} U^*$, U^* 为流体入口处的参考速度。

3.2 开关函数

定义开关函数 f_p 来确定激波的位置:

$$f_p = \begin{cases} 1.0, & \text{if } \frac{\min(p_R, p_L)}{|p_R - p_L| + \varepsilon^*} \leq 1.0, \\ 0.0, & \text{others,} \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\varepsilon^* = 10^{-16}$ 。由 2.1, 2.2 小节分析可知, 激波不稳定现象是由激波面切方向的扰动放大所引起的。计算二维问题时, 采用文献[11]中的方式来探测网格界面附近是否有激波:

$$\begin{aligned} f_{px} &= \max(f_{p(i+1/2, j)}, f_{p(i, j+1/2)}, f_{p(i, j-1/2)}, f_{p(i+1, j+1/2)}, f_{p(i+1, j-1/2)}), \\ f_{py} &= \max(f_{p(i, j+1/2)}, f_{p(i-1/2, j)}, f_{p(i+1/2, j)}, f_{p(i-1/2, j+1)}, f_{p(i+1/2, j+1)}). \end{aligned}$$

在激波附近, 压力差 $|p_R - p_L|$ 会增大, 从而 f_p 的取值为 1.0, 而在大部分计算区域, f_p 的取值为 0.0。接下来, 定义表示激波横向的开关函数 f (忽略 f_p 的下标 x 和 y):

$$\begin{cases} \text{if } f_p = 1.0, \text{ then } f = \begin{cases} 1.0, & \text{if } M_L > 1.0, M_R > 1.0; \\ 1.0, & \text{if } M_L < 1.0, M_R < 1.0; \\ 0.0, & \text{others;} \end{cases} \\ \text{if } f_p = 0.0, \text{ then } f = 0.0. \end{cases} \quad (15)$$

以 y 向为例, 计算中通量的最终形式为

$$\mathbf{G} = f \cdot \mathbf{G}_{\text{HLLC-FORCE}} + (1 - f) \cdot \mathbf{G}_{\text{HLLC}}. \quad (16)$$

式(15)中在 $f = 1.0$ 的地方, 表示网格界面法向接近激波横向, 那么通量切换到用混合通量来计算。但在大部分地方, 通量计算依然使用 HLLC 格式。这样可以尽可能多地减少计算中由混合格式所带来的耗散。将式(16)所得数值格式称之为 HLLC-FORCE 格式。

3.3 MUSCL 重构

通量的计算中, 采用二阶 MUSCL 重构^[16]来获得高阶精度:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i+1/2}^L = \mathbf{U}_i + \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} \phi(\Delta \mathbf{V}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{V}_{i+1/2}), \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^R = \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} \phi(\Delta \mathbf{V}_{i+1/2}, \Delta \mathbf{V}_{i+3/2}), \end{cases} \quad (17)$$

其中,限制器 ϕ 取 minmod 函数,特征变量的差分

$$\Delta V_{k+1/2} = R_{i+1/2}^{-1} \cdot (U_{k+1} - U_k), \quad i-1 \leq k \leq i+1.$$

采用 U_i 和 U_{i+1} 的 Roe 平均来计算特征向量矩阵 $R_{i+1/2}$ 和 $R_{i+1/2}^{-1}$.

4 数值试验

4.1 “奇偶失联”问题

该数值试验最早在文献[2]中由 Quirk 提出.平面激波以 Mach 数为 6 的速度从左向右移动,计算区域为 20×1 的均匀导管,网格为 400×20 的矩形网格.网格中心线处的小扰动给定为

$$y_{i,j\text{ mid}} = y_{i,j\text{ mid}} + (-1)^i \cdot 10^{-6}.$$

激波右边的初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 0, 0, 1).$$

图 3 展示了分别用 HLLC 格式和混合格式计算所得 $t = 2$ 时的密度等值线图.从图中清晰地看到,混合格式消除了 HLLC 格式的激波不稳定现象.

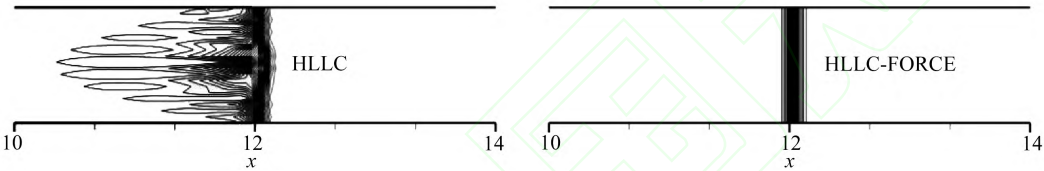


图 3 算例 4.1 的密度分布
Fig. 3 Density distribution in example 4.1

4.2 随机扰动问题

构造一个类似于 2.1 小节中平行流的随机扰动问题.平面激波以 Mach 数为 20 的速度从左向右移动,计算区域为 20×1 的均匀导管,网格为 400×20 的矩形网格.在右边初始条件上加上 10^{-6} 倍随机扰动:

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 0, 0, 1) + \alpha \cdot 10^{-6},$$

其中 α 为 $[0, 1]$ 的随机数.图 4 展示了分别用 HLLC 格式和混合格式计算所得 $t = 2$ 时的密度等值线图.从图中清晰地看到,混合格式消除了 HLLC 格式的激波不稳定现象.

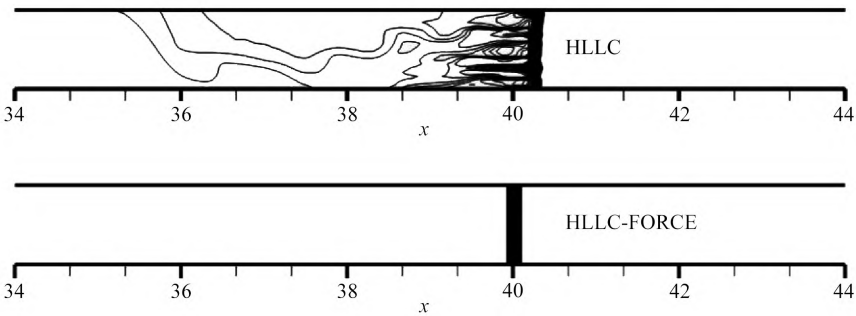


图 4 算例 4.2 的密度分布
Fig. 4 Density distribution in example 4.2

4.3 激波衍射问题

激波衍射问题是一个对许多 Godunov 型数值格式都失效的数值试验^[13].图 5 展示了用 HLLC 格式和混合格式计算所得 $t = 0.15$ 时的密度等值线图.其中计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$,网

格数为 400×400 , 计算 Mach 数为 5.09. 从图中可以看到, 混合格式不仅消除了 HLLC 格式在区域上边界正激波处的不稳定现象, 而且保留了 HLLC 格式高分辨率的优点, 例如, 绕射激波在后阶上的 Mach 反射激波, 以及流场中间的小激波和稍前面的稀疏波都清晰可见。

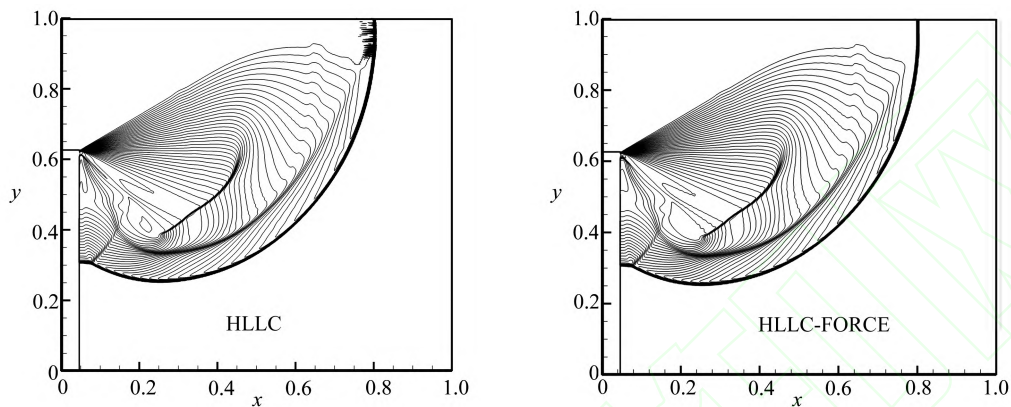


图5 算例 4.3 的密度分布

Fig. 5 Density distribution in example 4.3

4.4 超声速流绕柱问题

考虑超声速流流经圆柱体的算例, 计算区域由两个同心圆构成, 使用的网格为 40×160 , 自左向右的来流 Mach 数为 10, 具体初始条件和边界条件, 见文献[17]. 图 6 展示了使用 HLLC 格式和混合格式计算得到的密度分布图, 模拟时间 $t = 2$. 可以清晰地看到混合格式消除了 HLLC 格式的激波不稳定性。

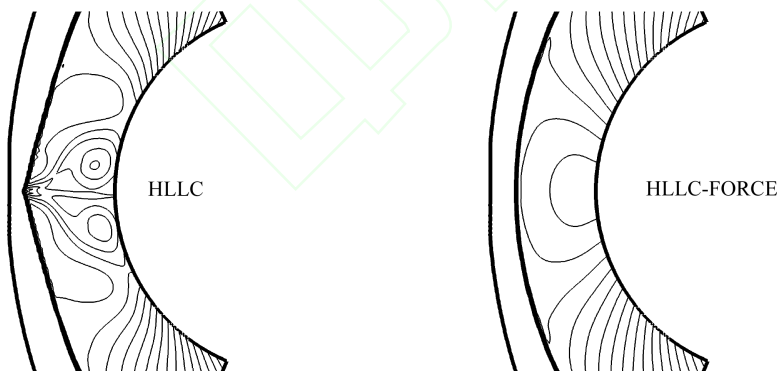


图6 算例 4.4 的密度分布

Fig. 6 Density distribution in example 4.4

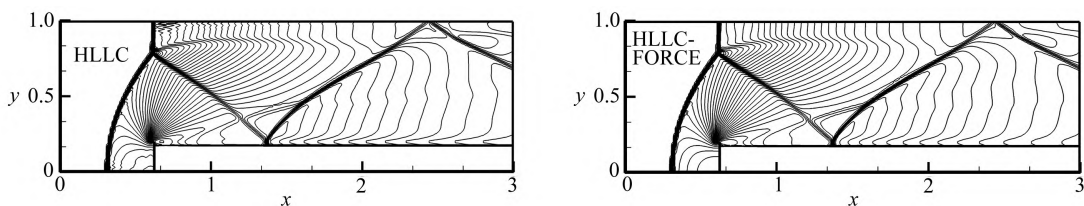


图7 算例 4.5 的密度分布

Fig. 7 Density distribution in example 4.5

4.5 前台阶问题

计算中使用 $[0,3] \times [0,1]$ 的矩形区域,在 $x = 0.6$ 处有一个高为0.2的台阶,计算使用的网格为 240×80 .自左向右的来流 Mach 数为3,详细的初边界条件,见参考文献[18].图7展示了使用HLLC格式和混合格式的计算结果,模拟时间 $t = 4$.可见HLLC格式的结果在上壁面的Mach杆后面出现激波不稳定现象,而混合格式则消除了此现象,并且Mach杆后面滑移线的分辨率也没降低多少.

4.6 二维 Riemann 问题

计算Lax和Liu^[19]所提出的二维Riemann问题.计算区域为 $[0,1] \times [0,1]$,网格数为 400×400 ,模拟时间 $t = 0.3$.计算初始条件如图8所示.

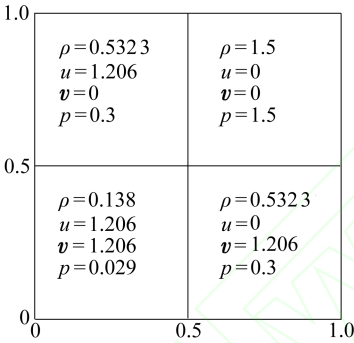


图8 算例4.6的初始条件

Fig. 8 The initial condition in example 4.6

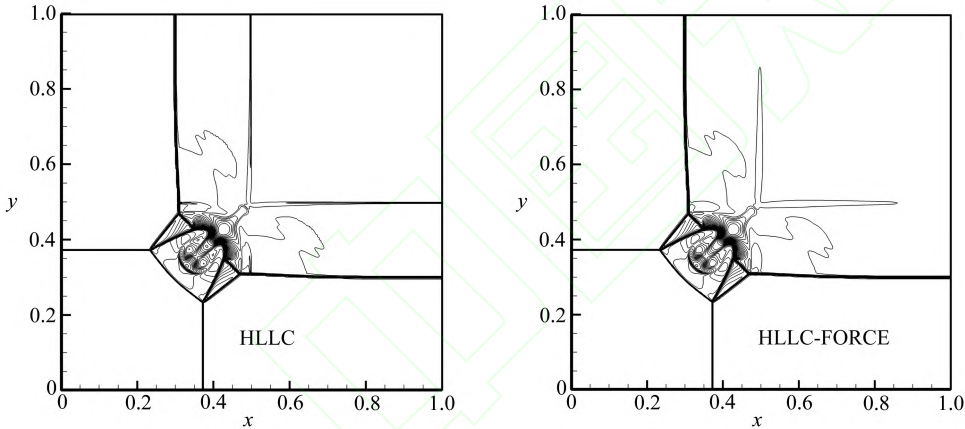


图9 算例4.6的密度分布

Fig. 9 Density distribution in example 4.6

计算中发现,使用高分辨率格式(如HLLC和Roe)计算该算例时,在初始间断处会出现两个伪激波,而混合格式却消除了这种现象(见图9),并且保留了HLLC格式高分辨率的优点.

4.7 格式比较

将本文构造的混合格式与Ren^[9]、刘友琼等^[10]的格式进行精度和计算时间的比较.使用Lax和Liu^[19]提出的二维Riemann问题作为算例,其计算区域和初始条件如图10所示.

采用网格数为 800×800 的HLLC格式所得结果作为参考解,计算解均采用 400×400 的粗网格.

不同格式的计算解与参考解之间的误差通过下列表达式来计算:

$$\|L^2(\rho)\| = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |\rho_{i,j} - \rho_{i,j}^{\text{ref}}|^2, \tag{18}$$

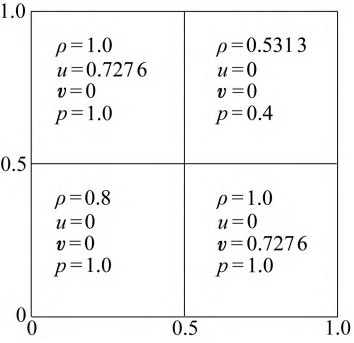


图10 算例4.7的初始条件

Fig. 10 The initial condition in example 4.7

其中 ρ 为密度, N_x, N_y 分别为 x 方向和 y 方向的网格数. 模拟时间 $t = 0.25$, 计算结果如图 11 所示. 不同数值格式的误差和 CPU 计算时间见表 1, 其中 rotated Roe 表示 Ren^[9] 提出的旋转 Roe Riemann 解法器, rotated HLLC-HLL 表示刘友琼等^[10] 提出的旋转混合格式. 从表 1, 可以看到本文提出的混合格式从计算精度和计算效率两方面都表现得非常好.

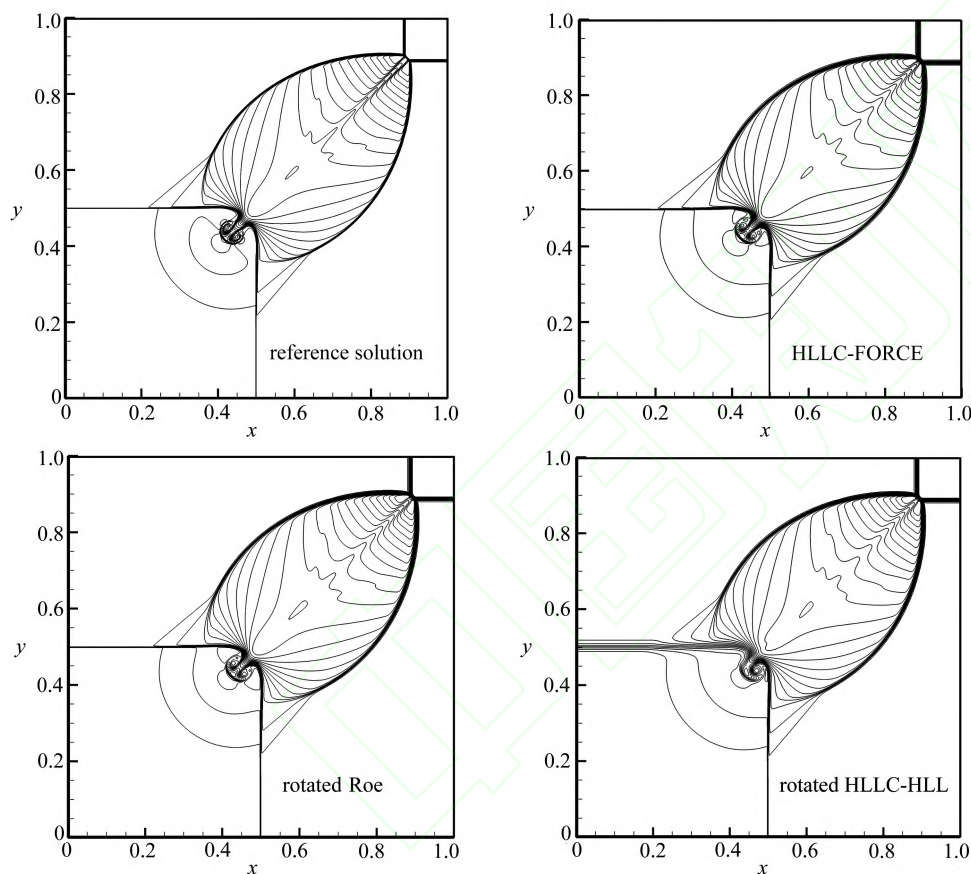


图 11 算例 4.7 的密度分布

Fig. 11 Density distribution in example 4.7

表 1 不同数值格式的误差和 CPU 计算时间的比较

Table 1 Comparison of errors and CPU time between different schemes

scheme	error $\ L^2(\rho)\ $	CPU time t_c / s
HLLC-FORCE	6.189 4E-5	722
rotated Roe	5.813 4E-5	1 156
rotated HLLC-HLL	4.387 5E-4	681

5 结 论

1) 本文对 HLLC 格式和 FORCE 格式进行了特定流动和扰动条件下的稳定性分析, 从而得出激波横向数值粘性不足是导致 HLLC 格式出现激波不稳定现象的原因. 更具体一点, HLLC 格式的质量通量和网格界面的切向动量通量的数值粘性不足以抑制激波横向的扰动, 是造成激波不稳定性的根本原因.

2) 本文构造的混合型数值格式仅需混合 HLLC 格式的质量通量和切向动量通量, 且与标

示激波横向的开关函数联合使用,不仅消除了 HLLC 格式的激波不稳定现象,而且最大程度地保留了 HLLC 格式高分辨率的优点。

本文构造混合格式的方法可以推广到其它高分辨率格式(例如 Roe 格式)和不规则网格(例如三角形网格),我们将在后续工作中进行详细说明。

参考文献(References):

- [1] Peery K M, Imlay S T. Blunt body flow simulations[C]//AIAA/SAE/ASME/ASEE 24th Joint Propulsion Conference. AIAA-88-2904, 1988.
- [2] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, **18**(6): 555-574.
- [3] Liou M S. Mass flux scheme and connection to shock instability[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **160**(2): 623-648.
- [4] XU Kun. Gas-kinetic schemes for unsteady compressible flow simulations[R]. von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series, 1998: 1-10.
- [5] Dumbser M, Moschetta J M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **197**(2): 647-670.
- [6] Moschetta J M, Gressier J, Robinet J C, Casalis G. The carbuncle phenomenon: a genuine Euler instability?[C]//Toro E F ed. *Godunov Methods: Theory and Applications*, 1995: 639-645.
- [7] Lin H C. Dissipation addition to flux-difference splitting[J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, **117**(1): 20-25.
- [8] Pandolfi M, D'Ambrosio D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the "carbuncle" phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **166**(2): 271-301.
- [9] REN Yu-xin. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers[J]. *Computers & Fluids*, 2003, **32**(10): 1379-1403.
- [10] 刘友琼, 封建湖, 任炯, 龚承启. 求解多维 Euler 方程的二阶旋转混合型格式[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 542-553. (LIU You-qiong, FENG Jian-hu, REN Jiong, GONG Cheng-qi. A second-order rotated hybrid scheme for solving multi-dimensional compressible Euler equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 542-553. (in Chinese))
- [11] Kim S D, Lee B J, Lee H J, Jeung I S. Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(20): 7634-7642.
- [12] 沈智军, 胡立军, 闫伟. 二维浅水波方程的数值激波不稳定性[J]. 计算物理, 2012, **29**(1): 25-35. (SHEN Zhi-jun, HU Li-jun, YAN Wei. Numerical shock instability for 2-D shallow water equations[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2012, **29**(1): 25-35. (in Chinese))
- [13] WU Hao, SHEN Long-jun, SHEN Zhi-jun. A hybrid numerical method to cure numerical shock instability[J]. *Communications in Computational Physics*, 2010, **8**(5): 1264-1271.
- [14] Toro E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*[M]. 3rd ed. Springer, 2009: 597-621.
- [15] 胡立军. 二维浅水波方程和欧拉方程数值激波不稳定性分析[D]. 硕士学位论文. 绵阳: 中国工程物理研究院, 2011. (HU Li-jun. Numerical shock instability of two dimensional shallow water equations and Euler equations[D]. Master Thesis. Mianyang: China Academy of Engineer-

- ing Physics, 2011.(in Chinese))
- [16] LI Bin, YUAN Li. Convergence issues in using high-resolution schemes and lower-upper symmetric Gauss-Seidel method for steady shock-induced combustion problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, **71**(11): 1422-1437.
 - [17] Kitamura K, Roe P, Ismail F. An evaluation of Euler fluxes for hypersonic flow computations [C]//*18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. AIAA 2007-4465, 2007.
 - [18] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, **54**(1): 115-173.
 - [19] Lax P D, LIU Xu-dong. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, **19**(2): 319-340.

Analysis of Numerical Shock Instability and a Hybrid Curing Method

HU Li-jun, YUAN Li

(LSEC(Chinese Academy of Sciences); Institute of Computational
Mathematics and Scientific/Engineering Computing,
Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, P.R.China)

Abstract: HLLC is a high resolution scheme, which can capture shock, contact discontinuity and rarefaction wave accurately. But when it is used to calculate multidimensional problems, the phenomenon of numerical shock instability may appear near the strong shock. Compared with the HLLC scheme, the FORCE scheme is stable near the strong shock, and the related numerical dissipation is lower than that of the HLL scheme. The stability of HLLC and FORCE under special conditions was analyzed, a hybrid scheme combining the HLLC and FORCE schemes in a special way was constructed, and a switching function to invoke the hybrid scheme in the transverse direction of the shock wave was defined. Numerical experiments demonstrate that the hybrid scheme not only presents good stability near the strong shock, but also retains the high resolution of HLLC.

Key words: numerical shock instability; analysis of stability; HLLC-FORCE hybrid scheme; MUSCL reconstruction

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB731505); The National Natural Science Foundation of China (General Program) (10972230)