第 44 卷 第 5 期	力 学 学 报	Vol. 44, No. 5
2012 年 9 月	Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics	Sep., 2012

# 七方程可压缩多相流模型的 HLLC 格式及应用<sup>1)</sup>

梁姗 刘伟袁礼2)

(中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所,科学与工程计算国家重点实验室,北京 100190)

摘要 针对 Saurel 和 Abgrall 提出的两速度两压力的七方程可压缩多相流模型, 改进了其数值解法并应用于 模拟可压缩多介质流动问题. 在 Saurel 等的算子分裂法基础上, 根据 Abgrall 的多相流系统应满足速度和 压力的均匀性不随时间改变的思想,推导了与 HLLC 格式一致的非守恒项离散格式以及体积分数发展方程 的迎风格式.进一步,通过改变分裂步顺序,构造了稳健的结合算子分裂的三阶 TVD 龙格-库塔方法.最后 通过几个一维和二维高密度比高压力比气液两相流算例,显示了该方法在计算精度和稳健性上的改进效果. 关键词 可压缩多相流,七方程模型,算子分裂,HLLC格式,TVD龙格-库塔

文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)05-0884-12 中图分类号: O359+.1

## 引 言

可压缩多介质流和多相流问题的数值求解-直是计算流体力学的重要研究方向.这类问题广泛 出现在自然界和工业中,如海洋中的气泡、核科学 中的惯性约束聚变等.可压缩多介质流和多相流的 数值求解方法和单介质或单相流的有很大区别, 求解自由面问题和分散多相流问题的数值方法也 不尽相同. 迄今为止人们已经发展了多种计算可 压缩多介质流的数值方法,如拉氏方法<sup>[1]</sup>, PIC<sup>[2]</sup> (particle-in-cell), ALE<sup>[3]</sup> (arbitrary Lagrange Euleria), front tracking<sup>[4]</sup>, VOF<sup>[5]</sup> (volume of fluid), ghost fluid<sup>[6-7]</sup>, kinetic scheme<sup>[8]</sup>, SPH (smoothed particle hydrodynamics)<sup>[9-10]</sup> 等,也提出了一些可压缩 多相流的模型及解法,如 Saurel 等<sup>[11-12]</sup>的七方 程, Allaire 等<sup>[13]</sup>的五方程以及格子 Boltzmann 模 型<sup>[14]</sup>等.其中,欧氏方法如 VOF, ghost fluid,  $\gamma$  模 型[15-16] 及多相流模型[11-12] 等因为能较好地处理 复杂界面或多相混合问题而得到更多重视.然而, 欧氏方法也有自身的缺点,如有的界面不清晰,有 的不守恒,有的稳健性差,对高密度比高压力比等 极端情况易出现数值振荡和发散<sup>[17-18]</sup>,这些问题 至今还没有得到完全解决,也是目前数值方法研究 中的难点.

本文考虑近年来发展起来的可压缩多相流模 型及其数值方法 [11-12]. 该模型假设微观上各种介

质均匀分布于流场中,没有明确的分界面,这是与 自由面处理方法的本质区别. 它同时适合于非平衡 分散相问题和自由界面问题.对于后者, 宏观的体 积分数  $\alpha$  可表征不同介质在流场中的分布情况, 通过  $\alpha$  的大梯度来间接表示自由界面的位置,这 样做的好处是省去考虑界面的几何细节,可处理界 面变化比较复杂的情况 (如空化或气泡破裂引起的 界面产生、气泡合并引起的界面消失等). 虽然多 相流方法比自由面方法计算量较大、界面扩散层较 宽,但它优越的普适性和稳健性已使其得到越来越 多的关注 [19-20].

目前可压缩多相流模型主要有两种, 以典型的 两组分问题为例,一种是一般的两速度两压力的七 方程模型 [11-12]; 另一种是稍简化的单一速度和压 力的五方程模型 [13,20]. 它们都是从每种组分的守 恒方程出发,引入分布特征函数作为权对不同组分 的方程进行积分平均,进而得到多组分并存情形下 的质量、动量、能量方程.

七方程模型中每种组分有自己的速度、压力和 密度,分别遵循各自的质量、动量和能量守恒方程, 再加一个由积分平均所得的体积分数发展方程, 以表征不同组分在流场中的分布随时间空间的变 化情况.由于压力和速度的不平衡,组分之间存在 相互作用力,引起各自动量和能量的变化.将多相 流模型应用于自由面问题时,必须满足自由面两侧 (两相间)速度一致和压力一致的物理条件[11-12,18].

2) E-mail: lyuan@lsec.cc.ac.cn

<sup>2012-01-12</sup> 收到第1稿, 2012-03-06 收到修改稿.

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金 (10972230, 11021101) 和国家重点基础研究发展计划 (2009CB731505) 资助项目.

Saurel 等<sup>[11-12]</sup> 通过引入无穷大松弛速率的速度松 弛项和压力松弛项,保证组分之间的压力和速度能 够瞬间达到平衡以满足此条件.由于组分随空间变 化,动量和能量方程的右端还有非守恒项,同时体 积分数的发展方程也是非守恒方程,即使该模型方 程组是无条件双曲的,其数值求解仍十分困难.一 般的求解守恒型方程的数值方法直接应用到这个 模型上很容易发散,因此如何对非守恒项进行离散 成为求解七方程模型的关键.

七方程模型和其他自由面方法相比的另一个 缺点是计算量比较大.以两组分为例,一般的自由 界面方法 (如 ghost fluid 方法)只需求解 4 个方 程 (质量、动量、能量守恒方程,水平集函数),而七 方程模型不仅要求解 7 个方程 (两套质量、动量、 能量守恒方程,一个体积分数发展方程),还需要进 行速度松弛和压力松弛 (求解常微分方程或代数方 程),计算量大约是 ghost fluid 方法的 3 倍左右.鉴 于此, Allaire 等<sup>[13]</sup>将各相间速度和压力一致的假 设直接代入七方程模型,用体积分数加权的界面速 度和压力来代替各种组分的速度和压力,建立了更 简化的五方程模型,使计算量有所减少.但五方程 无法直接应用于真实的相间非平衡问题.

Saurel 等[11-12] 设计了求解七方程模型的算子 分裂法,但所用的 HLL 格式耗散较大,所得自由 面过渡区较宽. Toro 等通过引入薄层理论的跳跃 条件, 求解无松弛项 Baer-Nunzatio 七方程模型的 Riemann 问题,构造了专门针对流 - 固两相流的 HLLC 格式<sup>[21]</sup>. Li 等<sup>[22]</sup> 发展了求解 Saurel 七方程 模型的 HLLC 格式,用 Roe 平均确定体积分数在接 触间断附近的状态,并基于 HLLC 格式的亚声速情 况和 Abgrall 提出的速度压力均匀性不随时间变化 的原则 [18], 推导了非守恒项以及非守恒发展方程 的离散格式.本文拟发展求解 Saurel-Abgrall 七方 程多相流模型的高分辨率方法,并应用于更极端的 可压缩气液两相流问题. 采用文献 [12] 的将非守恒 双曲算子和松弛算子分裂的方法,但通过改变算子 顺序将其推广到三阶 TVD 龙格-库塔法的每一级 中,提高了时间精度.对不考虑松弛项的非守恒双 曲算子,仍直接对守恒项应用 HLLC 数值通量 (如 文献 [22]), 并根据 HLLC 格式的所有情况 (这点与 文献 [22] 仅考虑亚声速情况不同) 和 Abgrall 的速 度压力均匀性不变原则,推导了非守恒项和体积分 数发展方程的离散格式.

#### 1 七方程模型

为清楚起见, 先考虑一维流动问题. 设流场 中存在两种介质, 相互间无质量转换和热量传输. Saurel-Abgrall<sup>[11]</sup> 可压缩两相流模型的一维形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \boldsymbol{S}_v(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{S}_p(\boldsymbol{U}) \quad (1)$$
  
式中

$$\begin{split} \boldsymbol{U} &= (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_1 E_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_2 E_2)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) &= (0, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1, \alpha_1 u_1 (E_1 + p_1), \\ \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2, \alpha_2 u_2 (E_2 + p_2))^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}) &= (-u_{\mathrm{int}}, 0, p_{\mathrm{int}}, u_{\mathrm{int}} p_{\mathrm{int}}, 0, -p_{\mathrm{int}}, -p_{\mathrm{int}} u_{\mathrm{int}})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{S}_v(\boldsymbol{U}) &= (0, 0, \lambda (u_2 - u_1), \lambda (u_2 - u_1) u_{\mathrm{int}}, \\ 0, -\lambda (u_2 - u_1), -\lambda (u_2 - u_1) u_{\mathrm{int}})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{S}_p(\boldsymbol{U}) &= (-\mu (p_2 - p_1), 0, 0, \mu p_{\mathrm{int}} (p_2 - p_1), \\ 0, 0, -\mu p_{\mathrm{int}} (p_2 - p_1))^{\mathrm{T}} \end{split}$$

 $\alpha_k$ 为体积分数,  $\alpha_k \in [0,1]$ , 且满足  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . 当  $\alpha_k = 0$ 时表明该点无第 k 种介质存在. 实际计算 中为防止由质量方程和动量方程算出的密度、速度 为无穷大, 初始时刻通常取  $\alpha_k = \varepsilon$  (如 10<sup>-7</sup>) 来代 替  $\alpha_k = 0$ .

*p*<sub>int</sub> 和 *u*<sub>int</sub> 代表微观上假想存在的两相界面的 压力和速度,有很多种选取方法,如气-液(固)问 题中 *p*<sub>int</sub> 取气体的压力,*u*<sub>int</sub> 取液体(固体)的速度. 这里采用文献[12]的取法

$$p_{\text{int}} = \sum_{k} \alpha_k p_k, \quad u_{\text{int}} = \sum_{k} \alpha_k \rho_k u_k / \sum_{k} \alpha_k \rho_k \quad (2)$$

## 2 数值方法

利用算子分裂技术 <sup>[12]</sup>, 对方程 (1) 分别单独 求解压力松弛算子  $U_t = S_p(U)$ 、速度松弛算子  $U_t = S_v(U)$ ,以及略去松弛项后的非守恒双曲型 方程组  $U_t + F(U)_x = H(U)\alpha_{1x}$ .

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \mathbf{L}_p^{\Delta t} \mathbf{L}_v^{\Delta t} \mathbf{L}_H^{\Delta t}(\boldsymbol{U}^n) \tag{3}$$

式中,  $L_p^{\Delta t}$  代表压力松弛算子,  $L_v^{\Delta t}$  代表速度松弛算 子,  $L_h^{\Delta t}$  代表非守恒双曲求解算子.式 (3) 只有一 阶时间精度, 后面将介绍如何推广到精度更高的三 阶 TVD 龙格 - 库塔方法中.以下依次介绍 3 种算 子的计算方法, 其中非守恒双曲求解算子是重点.

报

#### 2.1 双曲算子

这里数值格式建立的依据仍是 Abgrall 提出的 速度压力均匀性不变思想<sup>[18]</sup>,即:一个两相流系统 如果在初始时刻速度和压力均匀,那么在时间推进 过程中速度和压力也将保持同一值.

方程组(1)的第2,3,4和第5,6,7分量方程分 别对应两种介质的质量、动量、能量守恒方程,这 两个子系统具有相似性,所有的结论都可以类似推 导.因此这里只考虑方程组(1)的前4个方程.去 掉方程组(1)右端的松弛项,得到(为简明起见, 表示介质种类的下标被省略)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{\rm int} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})}{\partial x} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q})\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$
(5)

其中

$$Q = (\alpha \rho, \alpha \rho u, \alpha E)^{\mathrm{T}}$$
$$H(Q) = (0, p_{\mathrm{int}}, u_{\mathrm{int}} p_{\mathrm{int}})^{\mathrm{T}}$$
$$F(Q) = (\alpha \rho u, \alpha \rho u^{2} + \alpha p, \alpha u (E + p))^{\mathrm{T}}$$

对体积分数发展方程(4)可采用以下迎风格式离散

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{\text{int}})_j^n (\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}) \tag{6}$$

其中

$$\begin{array}{l} \phi_{j+1/2} = \alpha_{j+1/2,L}, \\ \phi_{j-1/2} = \alpha_{j-1/2,L}, \\ \phi_{j+1/2} = \alpha_{j+1/2,R}, \\ \phi_{j-1/2} = \alpha_{j-1/2,R}, \\ \end{array} \right\} \\ \begin{array}{l} \overset{}{\Rightarrow} (u_{\mathrm{int}})_{j}^{n} \geq 0 \\ \overset{}{\Rightarrow} (u_{\mathrm{int}})_{j}^{n} < 0 \\ \end{array} \right\}$$

第 2.2 节将说明, 在速度压力均匀性不变原则下, 上述离散格式可以由能量方程的 HLLC 离散式导 出. 对于同时有守恒项和非守恒项的方程组 (5), 可以直接写出 Godunov 型有限体积格式

$$\boldsymbol{Q}_{j}^{n+1} = \boldsymbol{Q}_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\boldsymbol{F}_{j+1/2}^{n} - \boldsymbol{F}_{j-1/2}^{n}) + \Delta t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}_{j}^{n})\boldsymbol{\Theta}$$
(7)

式中,  $F_{j\pm 1/2}^n$  为守恒项的数值通量,  $\Theta$  为非守恒项  $\partial \alpha / \partial x$  的某种离散, 它们将在下面给出.

#### 2.2 Riemann 问题的 HLLC 型近似解

传统的 Riemann 问题解,是利用特征分解技术,推导系列间断关系,进而分析估计得到. 然而 方程组 (5) 是非守恒的,其 Riemann 问题解比较复 杂. 为简化计算, 如同文献 [22] 的做法, 这里只将 式 (7) 的数值通量 *F*<sup>n</sup><sub>j+1/2</sub> 用传统 HLLC 数值通量 逼近

$$\boldsymbol{F}^{\text{HLLC}} = \begin{cases} \boldsymbol{F}_{\text{L}} , & \stackrel{\text{"}}{\rightrightarrows} s_{\text{L}} \ge 0 \\ \boldsymbol{F}_{\text{L}} + s_{\text{L}}(\boldsymbol{Q}_{*\text{L}} - \boldsymbol{Q}_{\text{L}}) , & \stackrel{\text{"}}{\rightrightarrows} s_{\text{L}} \le 0 \le s_{*} \\ \boldsymbol{F}_{\text{R}} + s_{\text{R}}(\boldsymbol{Q}_{*\text{R}} - \boldsymbol{Q}_{\text{R}}) , & \stackrel{\text{'}}{\rightrightarrows} s_{*} \le 0 \le s_{\text{R}} \\ \boldsymbol{F}_{\text{R}} , & \stackrel{\text{'}}{\rightrightarrows} s_{\text{R}} \le 0 \end{cases}$$

$$(8)$$

只要将传统的 HLLC 通量公式 <sup>[24-25]</sup> 中  $\rho \rightarrow \alpha \rho$ ,  $p \rightarrow \alpha p$ , 即可得状态  $Q_{*L}$  和  $Q_{*R}$ 

$$\boldsymbol{Q}_{*K} = \alpha_K \rho_K \frac{s_K - u_K}{s_K - s_*} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s_* \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (s_* - u_K) \left[ s_* + \frac{p_K}{\rho_K (s_K - u_K)} \right] \end{bmatrix},$$

$$K = \mathbf{L}, \mathbf{R} \tag{9}$$

式中, 波速估计 s<sub>L</sub>, s<sub>R</sub>, s<sub>\*</sub> 对于两种介质取同一值. 即

$$s_{\rm L} = \min\{u_{1\rm L} - c_{1\rm L}, u_{2\rm L} - c_{2\rm L}, u_{1\rm R} - c_{1\rm R}, u_{2\rm R} - c_{2\rm R}\}$$

$$s_{\rm R} = \max\{u_{1\rm L} + c_{1\rm L}, u_{2\rm L} + c_{2\rm L}, u_{1\rm R} + c_{1\rm R}, u_{2\rm R} + c_{2\rm R}\}$$

$$s_{*} = \frac{p_{\rm iR} - p_{\rm iL} + \rho_{\rm iL}u_{\rm iL}(s_{\rm L} - u_{\rm iL}) - \rho_{\rm iR}u_{\rm iR}(s_{\rm R} - u_{\rm iR})}{\rho_{\rm iL}(s_{\rm L} - u_{\rm iL}) - \rho_{\rm iR}(s_{\rm R} - u_{\rm iR})}$$

其中, ρ<sub>iL</sub>, ρ<sub>iR</sub>, p<sub>iL</sub>, p<sub>iR</sub> 和 u<sub>iL</sub>, u<sub>iR</sub> 分别表示网格界 面左右侧的混合密度、压力和速度

$$\rho_{\mathrm{i}K} = \alpha_{1K}\rho_{1K} + \alpha_{2K}\rho_{2K} \,,$$

 $p_{iK} = \alpha_{1K} p_{1K} + \alpha_{2K} p_{2K} , \qquad \qquad K = L, R$ 

 $u_{iK} = (\alpha_{1K}\rho_{1K}u_{1K} + \alpha_{2K}\rho_{2K}u_{2K})/\rho_{iK},$ 

为推导  $\Theta$  的离散公式和格式 (6),将式 (8) 写 为分量的形式,  $F^{HLLC} = (F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})^{T}$ ,其中质 量和动量方程的具体离散为

$$(\alpha \rho)_{j}^{n+1} = (\alpha \rho)_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{(1)} - F_{j-1/2}^{(1)})$$
$$(\alpha \rho u)_{j}^{n+1} = (\alpha \rho u)_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{(2)} - F_{j-1/2}^{(2)}) + \Delta t (p_{\text{int}})_{j} \Theta$$

设第 n 时间层速度和压力一致,即  $(u_{int})_j^n = u_{j\pm 1}^n = u_j^n$ 和  $(p_{int})_j^n = p_{j\pm 1}^n = p_j^n$ ,根据 Abgrall 的速度压力

均匀性不变原则 <sup>[18]</sup>, 应该有  $u_j^{n+1} = u_j^n, p_j^{n+1} = p_j^n$ . 代入上述质量和动量方程离散式得到

$$\Theta = (\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2})/\Delta x 
\phi_{j+1/2} \stackrel{\Delta}{=} (F_{j+1/2}^{(2)} - u_j F_{j+1/2}^{(1)})/p_j = 
\begin{cases}
\alpha_{\rm L}, & \stackrel{\mu}{=} s_{\rm L} \ge 0 \\
\alpha_{\rm L} + \alpha_{\rm L} s_{\rm L} \frac{u_{\rm L} - s_{\rm L}}{s_* - s_{\rm L}} (s_* - u_{\rm L}) \frac{\rho_{\rm L}}{p_{\rm L}}, \\
& \stackrel{\mu}{=} s_{\rm L} < 0 \le s_* \\
\alpha_{\rm R} + \alpha_{\rm R} s_{\rm R} \frac{u_{\rm R} - s_{\rm R}}{s_* - s_{\rm R}} (s_* - u_{\rm R}) \frac{\rho_{\rm R}}{p_{\rm R}}, \\
& \stackrel{\mu}{=} s_* \le 0 \le s_{\rm R} \\
\alpha_{\rm R}, & \stackrel{\mu}{=} s_{\rm R} < 0
\end{cases}$$
(10)

进一步,由速度一致性不变的条件,有  $s_* = u_L = u_R$ ,则式 (10) 可化简为

$$\phi_{j+1/2} = \begin{cases} \alpha_{j+1/2, \mathcal{L}} , & \stackrel{\text{tr}}{=} s_* \ge 0 \\ \\ \alpha_{j+1/2, \mathcal{R}} , & \stackrel{\text{tr}}{=} s_* < 0 \end{cases}$$

这样就得到非守恒项 Θ 的离散公式.

对于能量守恒方程有

$$(\alpha E)_{j}^{n+1} = (\alpha E)_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{(3)} - F_{j-1/2}^{(3)}) + \Delta t(p_{\text{int}})_{j} (u_{\text{int}})_{j} \Theta$$

利用  $E = \rho e + \rho u^2/2$ ,结合质量和动量方程的离散,上述能量方程的离散式可以化为

$$\begin{aligned} (\alpha \rho e)_{j}^{n+1} &= (\alpha \rho e)_{j}^{n} - \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \Big[ \Big( F_{j+1/2}^{(3)} - u F_{j+1/2}^{(2)} + \frac{1}{2} u^{2} F_{j+1/2}^{(1)} \Big) - \\ \Big( F_{j-1/2}^{(3)} - u F_{j-1/2}^{(2)} + \frac{1}{2} u^{2} F_{j-1/2}^{(1)} \Big) \Big] \end{aligned}$$

如果设流体满足刚性气体状态方程

$$\rho e = (p + \gamma B)/(\gamma - 1)$$

在压力一致性不变的条件下应有

$$(\rho e)_i^{n+1} = (\rho e)_i^n$$

这样对上式继续整理可得到体积分数发展方程的 迎风格式 (6),这里不再一一详述.

#### 2.3 空间重构

将式(1)右端非守恒项移至等号左边,并略去 松弛项,可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$$
(11)

式中,  $U = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_1 E_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_2 E_2)^{\mathrm{T}}$ , A(U) 为 Jacobian 矩阵, 详见附录. 这里 假设流体满足刚性气体状态方程. 对于式 (11), 可 应用 Van Leer 的 TVD-MUSCL 重构 <sup>[26]</sup>.

## 2.4 速度松弛

速度松弛算子是求解常微分方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = \boldsymbol{S}_{v}$$

当  $\lambda \to \infty$  时,上述常微分方程组经过系列简化的 近似解为

$$\begin{array}{l}
\alpha_{k} = \alpha_{k}^{0} \\
\rho_{k} = \rho_{k}^{0} \\
u_{1} = u_{2} = u_{\text{int}} = \frac{\alpha_{1}\rho_{1}u_{1}^{0} + \alpha_{2}\rho_{2}u_{2}^{0}}{\alpha_{1}\rho_{1} + \alpha_{2}\rho_{2}} \\
e_{1} = e_{1}^{0} + \frac{1}{2}(u_{\text{int}} - u_{1}^{0})^{2} \\
e_{2} = e_{2}^{0} + \frac{1}{2}(u_{\text{int}} - u_{2}^{0})^{2}
\end{array}$$
(12)

进而利用状态方程获得松弛后的 *p*<sub>1</sub>, *p*<sub>2</sub>, *E*<sub>1</sub>, *E*<sub>2</sub>. 式中, 上标 0 表示速度松弛前的值.

2.5 压力松弛

压力松弛算子是求解常微分方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$$

当  $\mu$  → ∞ 时,对上述方程组进行系列简化,可以 得到方程组

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = (\rho_1, \rho_2, p_{\text{int}})^{\text{T}}, \ \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}(p_{\text{int}}, \rho_k), \ \boldsymbol{k} = 1, 2$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \rho_1 \rho_1^{(0)}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1^{(0)}) - p_{\text{int}}(\rho_1 - \rho_1^{(0)}) \\ \rho_2 \rho_2^{(0)}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2^{(0)}) - p_{\text{int}}(\rho_2 - \rho_2^{(0)}) \\ \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} / \rho_1 + \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} / \rho_2 - 1 \end{pmatrix}$$

用上标 0 表示压力松弛前的值,记

$$A_{k} = -\rho_{k}^{(0)} e_{k}^{(0)} - p_{\text{int}}$$
$$B_{k} = \frac{\rho_{k}^{(0)}}{\gamma_{k} - 1} - (\rho_{k} - \rho_{k}^{(0)})$$
$$C_{k} = -\frac{\alpha_{k}^{(0)} \rho_{k}^{(0)}}{\rho_{k}^{2}}$$

F(X)的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

如同文献 [11], 非线性方程组 (13) 可利用 Newton 迭代法求解.

#### 2.6 时间离散: 三阶 TVD 龙格-库塔方法

对于方程组 (1) 的一个向前欧拉步可用 Godunov 分裂式 (3) 代替,而 TVD RK3 (Runge-Kutta) 方法中每一级的后两项之和相当于解的一个向前 欧拉步,因此通常直接对模型 (1) 应用 TVD RK3 方法的过程是

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \mathbf{L}_p^{\Delta t} \mathbf{L}_v^{\Delta t} \mathbf{L}_H^{\Delta t} \boldsymbol{U}^n \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{U}^{(2)} = 3\boldsymbol{U}^n/4 + \mathbf{L}_p^{\Delta t}\mathbf{L}_v^{\Delta t}\mathbf{L}_H^{\Delta t}\boldsymbol{U}^{(1)}/4 \qquad (14b)$$

$$\boldsymbol{U}^{(n+1)} = \boldsymbol{U}^n/3 + 2(\mathbf{L}_p^{\Delta t}\mathbf{L}_v^{\Delta t}\mathbf{L}_H^{\Delta t}\boldsymbol{U}^{(2)})/3 \quad (14c)$$

记  $U^{(2*)} = L_p^{\Delta t} L_v^{\Delta t} L_H^{\Delta t} U^{(1)}$ ,将其代入式 (14b),由各 介质的质量、动量分量方程分别得到

$$\begin{split} u_1^{(2)} &= \frac{3\alpha_1^n \rho_1^n u_1^n + \alpha_1^{(2*)} \rho_1^{(2*)} u_1^{(2*)}}{3\alpha_1^n \rho_1^n + \alpha_1^{(2*)} \rho_1^{(2*)}} \\ u_2^{(2)} &= \frac{3\alpha_2^n \rho_2^n u_2^n + \alpha_2^{(2*)} \rho_2^{(2*)} u_2^{(2*)}}{3\alpha_2^n \rho_2^n + \alpha_2^{(2*)} \rho_2^{(2*)}} \end{split}$$

注意, 虽然有 $u_1^n = u_2^n, u_1^{(2*)} = u_2^{(2*)},$ 但是 $u_1^{(2)} = u_2^{(2)}$ 不一定成立, 同理也可以知道 $p_1^{(2)} = p_2^{(2)}$ 不一定成 立, 使得中间变量 $U^{(2)}$ 不保证速度和压力在相间 平衡, 计算表明这造成了双曲算子经常发散. 因此 对计算步骤做了调整, 在不影响计算正确性的基础 上, 使得每一级中双曲算子前的速度和压力在相间 是平衡的

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \mathbf{L}_{H}^{\Delta t} \mathbf{L}_{p}^{\Delta t} \mathbf{L}_{v}^{\Delta t} \boldsymbol{U}^{n}$$

$$\tag{15}$$

$$\boldsymbol{U}^{(2)} = 3\boldsymbol{U}^n/4 + \mathbf{L}_H^{\Delta t} \mathbf{L}_p^{\Delta t} \mathbf{L}_v^{\Delta t} \boldsymbol{U}^{(1)}/4 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{U}^{(3)} = \boldsymbol{U}^n / 3 + 2(\mathbf{L}_H^{\Delta t} \mathbf{L}_p^{\Delta t} \mathbf{L}_v^{\Delta t} \boldsymbol{U}^{(2)}) / 3$$
(17)

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \mathbf{L}_n^{\Delta t} \mathbf{L}_n^{\Delta t} \boldsymbol{U}^{(3)} \tag{18}$$

其中,式(15)~式(17)对应于 Runge-Kutta的3个 子步,式(18)为附加计算.整个过程相当于在每个 子步内,先对解变量进行速度松弛、压力松弛,然后 双曲求解,只是在第3个子步后面附加了一次速度 和压力松弛修正.由于式(18)的新解在下一时间 步的式 (15) 中不因速度和压力松弛算子而变化,因此式 (15) 只需执行双曲求解. 相对于通常的 TVD RK3 式 (14) 实质上没有增加计算量. 图 1 给出了 其对应的计算流程图, 其中 k 表示子步数.



Fig.1 Computational flow chart

## 2.7 高维推广

二维可压缩两相流模型为  

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = \boldsymbol{H} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \boldsymbol{I} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \boldsymbol{S}_v + \boldsymbol{S}_p$$

$$\boldsymbol{H} = (-u_{\text{int}}, 0, p_{\text{int}}, 0, u_{\text{int}} p_{\text{int}}, 0, -p_{\text{int}}, 0, -u_{\text{int}} p_{\text{int}})^{\text{T}}$$

$$\boldsymbol{I} = (-v_{\text{int}}, 0, 0, p_{\text{int}}, v_{\text{int}} p_{\text{int}}, 0, 0, -p_{\text{int}}, -v_{\text{int}} p_{\text{int}})^{\text{T}}$$
(19)

在四边形网格上采用 Godunov 型有限体积法对不 含  $S_v, S_p$  的双曲型方程组离散

$$\boldsymbol{U}_{j}^{n+1} = \boldsymbol{U}_{j}^{n} - \lambda \sum_{e=1}^{4} \boldsymbol{E}_{j,e} \cdot \boldsymbol{n}_{j,e} l_{j,e} + \Delta t (\boldsymbol{H}_{j} \boldsymbol{\theta}_{x} + \boldsymbol{I}_{j} \boldsymbol{\theta}_{y})$$
(20)

式中,  $l_{j,e}$  表示网格单元 j 的第 e 条边的长度,  $n_{j,e}$ 代表边的单位外法向矢量,  $V_j$  为网格单元面积,  $\lambda = \Delta t/V_j$ ;  $H_j$  和  $I_j$  分别为  $H(U_j^{n+1/2}), I(U_j^{n+1/2})$  的逼近,由于 CFL 取小于 1,网格界面处 Riemann 问题解的最快特征波尚未到达网格重心,因此计算 中  $H_j$ , $I_j$  可直接取  $t_n$  时刻的值; $E_{j,e} \cdot n_{j,e}$ 表示第 e 条边的数值流通量

$$oldsymbol{F}_{e}^{\mathrm{HLLC}} = oldsymbol{E}_{j,e} \cdot oldsymbol{n}_{j,e} = (oldsymbol{F}_{e}^{\mathrm{HLLC}},oldsymbol{G}_{e}^{\mathrm{HLLC}}) \cdot oldsymbol{n}_{j,e}$$

 $\theta_x$  和  $\theta_y$  分别为  $\partial \alpha_1 / \partial x$  和  $\partial \alpha_1 / \partial y$  的数值近似,在 一致的直角坐标四边形网格上,满足压力速度均匀 性不变原则的离散逼近为

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{\Delta x} (\phi_{j,3} - \phi_{j,1}), \quad \theta_y = \frac{1}{\Delta y} (\phi_{j,4} - \phi_{j,2}) \\ \phi_{j,e} &= \begin{cases} (\alpha_{j,e})_{\mathrm{L}}, & \stackrel{\text{id}}{=} s_{*e} \ge 0 \\ (\alpha_{j,e})_{\mathrm{R}}, & \stackrel{\text{id}}{=} s_{*e} < 0 \end{cases} \\ s_{*e} &= \\ & \left[ \frac{p_{\mathrm{iR}} - p_{\mathrm{iL}} + \rho_{\mathrm{iL}} u_{\mathrm{iL}} (s_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{iL}}) - \rho_{\mathrm{iR}} u_{\mathrm{iR}} (s_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{iR}}) \right] \\ \rho_{\mathrm{iL}} (s_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{iL}}) - \rho_{\mathrm{iR}} (s_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{iR}}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中,  $s_{*e}$  为 HLLC 格式的接触间断波在 x 或 y 方向的波速估计. ( $p_{iL}$ ,  $\rho_{iL}$ ,  $u_{iL}$ ,  $v_{iL}$ )e 和 ( $p_{iR}$ ,  $\rho_{iR}$ ,  $u_{iR}$ ,  $v_{iR}$ )e 分别取第 e 条边两侧原始变量基于体积分数的加权平均值, 四边形网格单元的边按左、下、右、上的顺序依次标号 1 至 4. 松弛项处理同一维.

#### 3 数值结果

对于一维算例,将本文方法分别与采用同样 MUSCL 重构的 HLL 格式<sup>[11]</sup> 和 RGFM<sup>[23]</sup> 的计 算结果进行比较. 其中 HLL 格式忽视了接触间 断的存在,而 HLLC 格式考虑了接触间断,更加 接近 Riemann 问题的精确解. RGFM 属于一种 修正 ghost fluid 法,具有计算量小、捕捉界面清 晰的优点. 但当界面两侧状态相差较大时 (如高 压力比等极端问题),由于 Riemann 问题初值选得 不够准确、或固有的非守恒误差等因素可导致在物 质界面附近产生非物理偏移. 本文用无量纲量计 算,选择参考长度  $L_{ref}$ 、参考压力  $p_{ref}$  和参考密度  $\rho_{ref}$ . 取参考速度  $u_{ref} = \sqrt{p_{ref}/\rho_{ref}}$ ,无量纲时间  $t = t'(u_{ref}/L_{ref})$ ,其中 t' 为有量纲时间. 在一维算 例中,计算区域取为 [0,1],均匀分布 200 个网格.

#### 3.1 算例 1: 气液激波管问题

这是一个高压强比的气液问题<sup>[7]</sup>,界面两侧的 压强比高达 8000 : 1. 初始高压区域位于左侧的 气体区,物质界面位于 x = 0.4,流动状态为:若  $x \le 0.4$ ,  $(\rho, u, p, \gamma, B) = (1.27, 0, 8000, 1.4, 0)$ ,否则  $(\rho, u, p, \gamma, B) = (1.0, 0, 1.0, 7.15, 3309).$  气体满足理 想气体状态方程,液体满足水的 Tait 方程. 计算取 CFL=0.05,图 2 给出 t = 0.002 时刻的流场压力、 速度、密度分布,最后一幅是物质界面附近密度分 布的放大图.用 RGFM 方法计算的密度在界面附 近会产生低亏现象,这可能是 RGFM 的非守恒误 差.而多相流方法结果比较正常,且更符合精确解.





Fig.2 Flow distributions in example 1 (continued)

#### 3.2 算例 2: 水下爆炸问题

本问题的初始条件同文献 [27]. 初始界面位置 x = 0.5,初始左右状态为:若 $x \le 0.5$ ,( $\rho$ , u, p,  $\gamma$ , B) = (0.01, 0, 1000, 2, 0), 否则 ( $\rho$ , u, p,  $\gamma$ , B) = (1.0, 0, 1.0, 7.15, 3309). 这个例子左侧会产生速度较快 的稀疏波,因此发展时间比较短. 计算取 CFL=0.1, 图 3 显示了  $t = 7.18 \times 10^{-4}$  时刻流场压力、速度、密 度分布. HLL 格式<sup>[11]</sup> 在物质界面附近, 速度分布 出现了非物理的振荡,可能是由于 HLL 格式磨平 接触间断的误差造成的;而本文的 HLLC 计算结果 正常,且在左侧稀疏波和右侧激波位置,耗散相对 较小,速度、压力和密度分布都更加准确.另外,注 意到两种方法的耗散整体上都偏大,尤其是速度分 布曲线,这可能是速度松弛过程造成的. 松弛后速 度由各介质速度的简单加权平均得到,权值为各自 的分密度,而此问题中两种介质密度比显著,导致 速度的差异被削弱. 将来可以通过改进速度松弛过 程和极小体积分数时流场变量的处理办法来改善.







#### 3.3 算例 3: 空气激波撞击氦气泡问题

这是个经典的算例 <sup>[6,17,28]</sup>. 一个二维圆柱形 氦气泡被空气包围,初始时刻气泡处于动力学和热 力学平衡状态,马赫数为 1.22 的空气激波从右边 撞击气泡. 计算区域取 [0,325]×[0,89],初始激波位 于 x = 225 处,氦气泡的半径 r = 25,中心位于 x = 175, y = 44.5. 初始时刻流场分布

891

 $(\rho, u, v, p, \gamma) = \begin{cases} (1.3764, -0.394, 0, 1.5698, 1.40), 波后气体 \\ (1.0000, 0, 0, 1.0000, 1.40), 波前气体 \\ (0.1380, 0, 0, 1.0000, 1.67), 氦泡内部 \end{cases}$ 

区域的左右边界采用特征边界条件,上下用反射 边界条件.计算区域均匀分布 512×128 个网格, 取 CFL 为 0.3,对这个问题从激波首次接触气泡 开始,再计算无量纲时间 273.4 后,换成有量纲 量,相当于文献 [28] 的实验结果在激波首次接触 气泡之后再经过 983 μs 时间 (取参考密度  $\rho_{ref} = \rho_{air} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,长度  $L_{ref} = 10^{-3} \text{ m}$ ,压力  $p_{ref} = 10^5 \text{ Pa}$ ,速度  $u_{ref} = \sqrt{p_{ref}/\rho_{ref}}$ ,无量纲时间  $t' = t(u_{ref}/L_{ref})$ ,其中 t为有量纲时间),图 4 比较了在 激波首次接触气泡之后同一时间 t=32, 52, 82, 245,427 和 983 μs 的实验结果 <sup>[28]</sup> 和本文计算结果,其



Fig.4 Comparison of experiment (left) and computed (right) density contours in example 3



图 4 算例 3 实验结果 (左) 与计算结果的密度分布 (右) 对比 (续)

Fig.4 Comparison of experiment (left) and computed (right) density contours in example 3 (continued)

中用体积分数  $\alpha_1 = 0.5$  的等高线表示气泡边界. 可以看出,得到了和实验比较一致的结果.

## 3.4 算例 4: 二维双水下爆炸

计算区域为 [0, 4]×[0, 4],两个初始半径均为 0.3 的高压气泡柱圆心分别位于 (1.4, 2) 和 (2.6, 2). 初始时刻气泡内外的状态分布为

 $(\rho, u, v, p, \gamma, B) =$ 

{ (1000,0,0,10<sup>8</sup>,1.4,0), 气泡柱内部 (1000,0,0,10<sup>5</sup>,7.15,3309), 气泡柱外部 计算网格为 256×256,取 CFL 为 0.2. 图 5 给出 了不同时刻压力等值线,用体积分数为 0.5 的等值 线显示气泡边界 (图中虚线表示),并与 RGFM<sup>[23]</sup> 的结果进行对比. 爆炸开始后,由于气泡内外压 力的巨大差异,会产生两个在水中向外传播的圆形 激波 (图 5(a)),之后两个激波相撞并产生反射激波 (图 5(b)).反射波在 *t* = 3.450×10<sup>-4</sup> 时到达气泡边 界,然后穿过界面形成在气泡内部传播的激波,在 气泡外部远离开气泡方向则产生稀疏波 (图 5(c)). 可见本文的结果与同时刻 RGFM 的结果基本吻合.



Fig.5 Comparison of pressure contours in example 4 (RGFM (above) and this paper (below))

## 3.5 算例 5: 空气中的高压液柱膨胀问题

此算例来自文献 [12]. 计算区域为 [0, 0.5] × [0,

0.5],中间有一个边长为 0.2 的正方形高压液柱被 空气包围.初始时刻液柱中含有 1% 体积分数的空 气 (反之亦然), 液柱内外状态分布为

$$(\rho, u, v, p, \gamma, B) =$$

$$\begin{cases}
(100, 0, 0, 10^4, 4.4, 6\,000), 液柱内\\(5, 0, 0, 1, 1.4, 0), 液柱外
\end{cases}$$

计算取 256×256 个网格,取 CFL 为 0.1. 初始时刻 由于液体压力远远高于空气压力,在液气界面会形 成向外的激波和向内的稀疏波,稀疏波在液柱中心 相遇并发生反射.穿过稀疏波,液体的压力、密度 和内能都将不断降低.对于真实液体,当压力低于 临界值时,开始出现质量转换,部分液体汽化.如 果用单相流的方法 (如 RGFM) 计算液柱内部,由 于液柱的过分膨胀,在中心处易出现负压力,导致 计算失败.而用多相流模型计算,则以液柱中心新 的气泡的产生扩大来代替液柱的过分膨胀,不但保 证了正压力,而且定性的模拟了空化效应,更符合 物理.图 6(a)和图 6(b)给出了  $t = 23 \times 10^{-4}$ 时刻 流场中气体体积分数和混合压力的等值线.从体积 分数的等值线图中,可以看到外部不断扩大的原始 液气界面和内部新产生的气泡边界.



Fig.6 Contours in example 5

#### 4 结 论

在 Saurel 等的解法基础上,本文改进了计算两 速度两压力七方程可压缩多相流模型的数值格式. 将传统的 HLLC 数值流通量直接代入 Godunov 型 有限体积格式,推导出对应的非守恒项和体积分数 发展方程的离散格式.另外,通过改变分裂算子的 次序,使得结合了算子分裂法的三阶 TVD Runge-Kutta 方法更稳健.本文方法简单易于推广.通过 对几个高压力比、高密度比问题的数值试验,显示 本文方法可得到比修正虚流体法更准确、更稳健的 结果.如引言所述,多相流方法计算量比较大,将尝 试在多 GPU 上计算,以缓解这一问题.

#### 参考文献

 von Neumann J, Richtmyer RD. A method for the calculation of hydrodynamics shocks. *Journal of Applied Physics*, 1950, 21: 232-237

- 2 Harlow FH. The particle-in-cell computing method of fluid dynamics. *Methods Compute Phy*, 1964, 3: 319-343
- 3 Hirt CW, Amsden AA, Cook JL. An arbitrary Lagrangian Eulerian computing method for all flow speeds. *J Comput Phys*, 1974, 14: 227-253
- 4 Chern IL, Glimm J, Mcbryan O, et al. Front tracking for gas dynamics. J Comput Phys, 1986, 62: 83-110
- 5 Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J Comput Phys, 1981, 39: 201-225
- 6 Fedkiw RP, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). J Comput Phys, 1999, 152: 457-492
- 7 Liu TG, Khoo BC, Yeo KS. Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface. J Comput Phys, 2003, 190: 651-681
- 8 Xu Kun. BGK-based scheme for multicomponent flow calculations. J Comput Phys, 1997, 134: 122-133

- 9 Libersky LD, Petschek AG, Carney TC, et al. High strain Lagrangian hydrodynamics: a three-dimensional SPH code for dynamic material response. J Comput Phys, 1993, 109: 67-75
- 10 Petschek AG, Libersky LD. Cylindrical smoothed particle hydrodynamics. J Comput Phys, 1993, 109: 76-83
- 11 Saurel R, Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. J Comput Phys, 1999, 150: 425-467
- 12 Saurel R, Lemetayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. J Fluid Mech, 2001, 431: 239-271
- 13 Allaire G, Clerc S, Kokh S. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. J Comput Phys, 2002, 181: 577-616
- 14 Shan X, Chen H. A lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. *Phys Rev E*, 1993, 47: 1815-1819
- 15 Shyue KM. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems. J Comput Phys, 1998, 142: 208-242
- 16 Shyue KM. A fluid-mixture type algorithm for compressible multicomponent flow with van der Waals equation of state. J Comput Phys, 1999, 156: 43-88
- 17 Quirk JJ, Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction. J Fluid Mechanics, 1996, 318: 129-163
- 18 Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach. J Comput Phys, 1996, 125: 150-160
- 19 Tian BL, Toro EF, Castro CE. A path-conservative method for a five-equation model of two-phase flow with an HLLC-

type Riemann solver. Computers & Fluids, 2011, 46: 122-132

- 20 Kapila AK, Menikoff R, Bdzil JB, et al. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations. *Physics of Fluids*, 2001, 13: 3002-3024
- 21 Tokareva SA, Toro EF. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow. J Comput Phys, 2010, 229: 3573-3604
- 22 Li Q, Feng HJ, Cai TM, et al. Difference scheme for twophase flow. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25: 536-545
- 23 Wang CW, Liu TG, Khoo BC. A real ghost fluid method for the simulation of multimedium compressible flow. SIAM J Sci Comput, 2006, 28: 278-302
- 24 Toro EF. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1997
- 25 Toro EF, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 1994, 4: 25-34
- 26 van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme, V: a second order sequel to Godunov's method. J Comput Phys, 1979, 32: 101-136
- 27 Tang HS, Huang D. A second-order accurate capturing scheme for 1D inviscid flows of gas and water with vacuum zones. J Comput Phys, 1996, 128: 301-318
- 28 Haas JF, Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *Jour*nal of Fluid Mechanics, 1987, 181: 41-76

#### DOI: 10.6052/0459-1879-12-022

(责任编辑: 刘希国)

#### 附录

方程组 (11) 的 Jacobian 矩阵为

	$u_{ m int}$	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0
	$-\gamma_1 B_1 - p_{\rm int}$	$\frac{\gamma_1-3}{2}u_1^2$	$(3-\gamma_1)u_1$	$\gamma_1 - 1$	0	0	0
A(U) =	$-\gamma_1 B_1 u_1 - p_{\text{int}} u_{\text{int}}$	$\frac{\gamma_1 - 1}{2}u_1^3 - u_1H_1$	$H_1 - u_1^2(\gamma_1 - 1)$	$\gamma_1 u_1$	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0
	$\gamma_2 B_2 + p_{ m int}$	0	0	0	$\frac{\gamma_2-3}{2}u_2^2$	$(3-\gamma_2)u_2$	$\gamma_2 - 1$
	$\left[ \gamma_2 B_2 u_2 + p_{\rm int} u_{\rm int} \right]$	0	0	0	$\frac{\gamma_2 - 1}{2}u_2^3 - u_2H_2$	$H_2 - u_2^2(\gamma_2 - 1)$	$\gamma_2 u_2$

其中

$$H = \frac{E+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2}$$
$$p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma B, \quad c^2 = \frac{\gamma(p+B)}{\rho}$$

#### 矩阵 A(U) 的特征值为

 $\lambda_{1,2,3,4,5,6,7} = u_{\text{int}}, u_1 - c_1, u_1, u_1 + c_1, u_2 - c_2, u_2, u_2 + c_2$ 

注意到 TVD-MUSCL 重构中,计算  $A_{j+1/2}$  所需的原始 变量由上一时间层左右单元平均值的简单代数平均方法得

895

到,其满足  $u_{int} = u_1 = u_2$ ,  $p_{int} = p_1 = p_2$ .因此在对矩阵 A(U)做特征分解时,可以只考虑速度压力一致的情形.

这样容易推导左特征向量矩阵

\_ \_ \_ \_ \_ \_

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3, \boldsymbol{l}_4, \boldsymbol{l}_5, \boldsymbol{l}_6, \boldsymbol{l}_7)^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\begin{split} & l_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & l_2 = \frac{\gamma_1 - 1}{2c_1^2} \left( -\frac{\gamma_1 B_1 + p}{\gamma_1 - 1}, u^2 - H_1 + \frac{u + c_1}{\gamma_1 - 1}c_1, \right. \\ & \left. -u - \frac{c_1}{\gamma_1 - 1}, 1, 0, 0, 0 \right) \\ & l_3 = \frac{\gamma_1 - 1}{2c_1^2} \left( 0, 2H_1 - 2u^2, 2u, -2, 0, 0, 0 \right) \\ & l_4 = \frac{\gamma_1 - 1}{2c_1^2} \left( -\frac{\gamma_1 B_1 + p}{\gamma_1 - 1}, u^2 - H_1 - \frac{u - c_1}{\gamma_1 - 1}c_1, \right. \\ & \left. -u + \frac{c_1}{\gamma_1 - 1}, 1, 0, 0, 0 \right) \\ & l_5 = \frac{\gamma_2 - 1}{2c_2^2} \left( \frac{\gamma_2 B_2 + p}{\gamma_2 - 1}, 0, 0, 0, u^2 - H_2 + \frac{u + c_2}{\gamma_2 - 1}c_2 \right. \\ & \left. -u - \frac{c_2}{\gamma_2 - 1}, 1 \right) \end{split}$$

$$\begin{split} \boldsymbol{l}_6 &= \frac{\gamma_2 - 1}{2c_2^2} (0, 0, 0, 0, 2H_2 - 2u^2, 2u, -2) \\ \boldsymbol{l}_7 &= \frac{\gamma_2 - 1}{2c_2^2} \left( \frac{\gamma_2 B_2 + p}{\gamma_2 - 1}, 0, 0, 0, u^2 - H_2 - \frac{u - c_2}{\gamma_2 - 1} c_2, -u + \frac{c_2}{\gamma_2 - 1}, 1 \right) \end{split}$$

以及右特征向量矩阵  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7)$ ,其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{1} &= \left(1, \frac{\gamma_{1}B_{1} + p}{c_{1}^{2}}, \frac{\gamma_{1}B_{1} + p}{c_{1}^{2}}u, \frac{\gamma_{1}B_{1} + p}{c_{1}^{2}}H_{1}, \\ &- \frac{\gamma_{2}B_{2} + p}{c_{2}^{2}}, -\frac{\gamma_{2}B_{2} + p}{c_{2}^{2}}u, -\frac{\gamma_{2}B_{2} + p}{c_{2}^{2}}H_{2}\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{2} &= (0, 1, u - c_{1}, H_{1} - uc_{1}, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{3} &= \left(0, 1, u, H_{1} - \frac{c_{1}^{2}}{\gamma_{1} - 1}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{4} &= (0, 1, u + c_{1}, H_{1} + uc_{1}, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{5} &= (0, 0, 0, 0, 1, u - c_{2}, H_{2} - uc_{2})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{6} &= \left(0, 0, 0, 0, 1, u, H_{2} - \frac{c_{2}^{2}}{\gamma_{2} - 1}\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_{7} &= (0, 0, 0, 0, 1, u + c_{2}, H_{2} + uc_{2})^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

## AN HLLC SCHEME FOR THE SEVEN-EQUATION MULTIPHASE MODEL AND ITS APPLICATION TO COMPRESSIBLE MULTICOMPONENT FLOW<sup>1)</sup>

#### Liang Shan Liu Wei Yuan Li<sup>2)</sup>

(LSEC, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract In this paper, the numerical method for the two-pressure and two-velocity seven-equation model presented by Saurel and Abgrall is improved and applied to numerical simulation of compressible multicomponent flows. Based on the operator splitting method given by Saurel et al. and the idea proposed by Abgrall that "for a two phase system, uniformity in velocity and pressure at t = 0 will be kept on the same variable during its temporal evolution", discretization for the non-conservative terms and upwind scheme for the volume fraction evolution equation are derived in terms of the underlying HLLC approximate Riemann solver used for the conservation equations. Moreover, the third-order TVD Runge-Kutta method is implemented in conjunction with the operator splitting to obtain a robust procedure by reordering the sequence of operators. Numerical tests with several 1d and 2d compressible gas-liquid multicomponent flow problems with high density and high pressure ratios demonstrate that the present method is more accurate and robust than previous methods.

Key words compressible multiphase flow, seven-equation multiphase model, operator splitting, HLLC, TVD Runge-Kutta

Received 12 January 2012, revised 6 March 2012.

The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10972230, 11021101) and National Basic Research Program of China (2009CB731505).

<sup>2)</sup> E-mail: lyuan@lsec.cc.ac.cn