★数学史话★

自然数幂和公式之历史发展

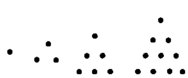
中国科学院自然科学史研究所　汪晓勤

所谓自然数幂和,系指

$$1^p+2^p+\cdots+n^p=\sum_{r=1}^{n} r^p\ (p\in \mathrm{N}).\qquad (1)$$

在中学数学里,我们遇到 $p=1,2,3$三种情形.(1)的求和公式从低次幂到高次幂,从特殊到一般的历史所留给我们的不同时代、不同国家的数学家所展示的聪明才智,对于我们今天的数学教学仍有着现实意义.

公元前6世纪,古希腊毕达哥拉斯(pythagoras)发现,从1开始,任意多个连续自然数之和构成三角形数.如图1,毕氏以一点代表1,二点代表2,等等.如图2,在三角形数旁补一倒立的三角形数,由此易得



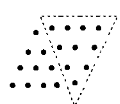


图 1　　　图 2

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.\qquad (2)$$

毕氏还以图3所示的正方形数的构造得出公式

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2.\qquad (3)$$

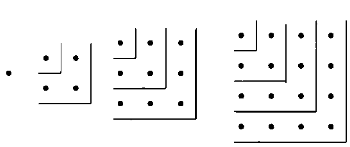


图 3

公元前3世纪,阿基米德(Archimedes,前287~212)在《论劈锥曲面体和球体》一书中利用几何方法证明了如下引理:

$$(n+1)(na)^2+a(a+2a+\cdots+na)=3[a^2+(2a)^2+\cdots+(na)^2].$$

当 $a=1$时,利用(2)可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.\qquad (4)$$

公元100年左右,毕达哥拉斯学派数学家尼可麦丘(Nicomachus)著《算术引论》一书,书中的一条命题说,在奇数1,3,5,7,… 中,第一个是立方数,后面两个之和是立方数,再后面三个之和是立方数,等等,此即

$1^3=1$(1个奇数),

$2^3=3+5$(2个奇数),

$3^3=7+9+11$(3个奇数),

$4^3=13+15+17+19$(4个奇数),

… … … … … …

$n^3=(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots+(n^2+n-1)$ (n个奇数).

由此易知,当 $p=3$时,(1)是 $1+2+\cdots+n$个连续奇数1,3,…,(n^2+n-1)之和,从而由(2)、(3)即得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.\qquad (5)$$

《算术引论》未载此公式,但我们有理由相信,尼可麦丘,甚至比他更早一些的希腊数学家是知道此公式的,因为连当时的罗马土地丈量员也知道它;而且早期毕氏学派的学者们惯常用图3所示的在1旁相继添加直角(添一个直角即是增加一个奇数)的方法来求连续奇数之和,他们知道,若加到1旁的直角个数为 r,则和(包括1)为 $(r+1)^2$.因此有了尼可麦丘的发现,只要找出 $2^3+3^3+\cdots+n^3$中共有几个直角即可得三次幂和.

公元5~6世纪,印度数学家阿耶波多(Āryabhata,476~?)的数学著作中载有公式(4)和(5),后来的婆罗摩笈多(Brahmagupta,7世纪)、摩诃毗罗(Mahāvira,9世纪)和婆什迦罗(Bhāskara,12世纪)的数学著作中都出现公式(2)、(4)和(5).

11世纪,阿拉伯数学家阿尔卡克希(Al-karkhi)的数学著作中出现公式(4)和(5),其中前者的形式是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\right).$$

阿尔卡克希用富有希腊特色的几何代数法对公式(5)作出证明.如图4所示,设 AB 是正方形 AC 之一

边,$AB=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$,$BB'=n$,$B'B''=n-1$,$B''B'''=n-2$,等等.在 AB',AB'',… 上作正方形 AC'、AC'',…,得 $n-1$个矩尺形 $BC'D$,$B'C''D'$,$B''C'''D''$,….因矩尺形 $BC'D$的面积

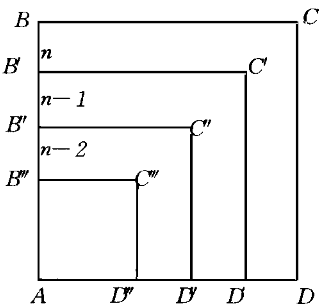


图 4

$$S_{BC'D}=BB'\cdot BC+DD'\cdot C'D'=BB'(BC+C'D'),$$

而 $BC=\frac{n(n+1)}{2}$,$C'D'=\frac{n(n-1)}{2}$,$BB'=n$,故

$$S_{BC'D}=n\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right]=n^3.$$

同理,$S_{B'C''D'}=(n-1)^3$,$S_{B''C'''D''}=(n-2)^3$,等等.因此有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=S_{ABCD}=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

与阿尔卡克希同时代的另一位阿拉伯数学家阿尔海森(Al-Haitham,965~1039)在求抛物弓形绕底旋转所得立体的体积时遇到了三、四次幂和问题.阿尔海森用巧妙的几何代数方法来解决,如图 5所示.它相当于

$$(n+1)\sum_{r=1}^{n}r^p=\sum_{r=1}^{n}r^{p+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k}r^p\right).\qquad(6)$$

当 $p=2$时,由(6)可得

$$\sum_{r=1}^{n}r^3=\frac{3}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=1}^{n}r^2-\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{n}r;$$

当 $p=3$时,由(6)可得

$$\sum_{r=1}^{n}r^4=\frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=1}^{n}r^3-\frac{1}{5}\sum_{r=1}^{n}r^2.$$

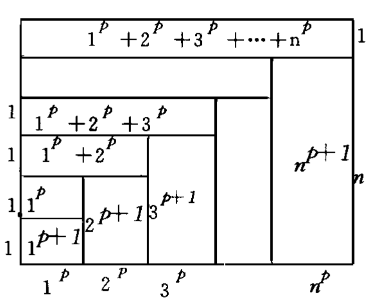


图 5

类似地,其他幂和都可由相应低次幂和求得.

13世纪,意大利数学家斐波纳契(Fibonacci)在其《象限仪书》(1225)中给出:

$$1^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{12}n(n+2)(2n+2)\ (n\text{为奇数}),$$

$$2^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{12}n(n+2)(2n+2)\ (n\text{为偶数}).$$

15世纪,阿拉伯数学家阿尔卡希(Al-Kashi)在《算术之钥》(1427)一书中给出四次幂和公式

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\left[\frac{1}{5}\left(\sum_{r=1}^{n}r-1\right)+\sum_{r=1}^{n}r\right]\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}r^2\right).$$

利用(2)和(4)可得

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n.\qquad(7)$$

17世纪,自然数幂和公式吸引了更多的数学家.德国数学教师法尔哈伯(J. Faulhaber,1580~1635)在其《算术之秘》(1615)中建立了(1)的从 $p=1$到 $p=17$的公式.法国数学家帕斯卡(B. Pascal,1623~1662)利用图 6所示的算术三角形,由不完全归纳法获得公式

$$C_{p+1}^{1}\cdot\sum_{r=1}^{n}r^p+C_{p+1}^{2}\cdot\sum_{r=1}^{n}r^{p-1}+\cdots+C_{p+1}^{p}\cdot\sum_{r=1}^{n}r=(n+1)^{p+1}-n-1.\qquad(8)$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45		
1	4	10	20	35	56	84	120			
1	5	15	35	70	126	210				
1	6	21	56	126	252					
1	7	28	84	210						
1	8	36	120							
1	9	45								
1	10									
1										

图 6

因此,已知前 $p-1$次幂和就可得 p次幂和公式.

瑞士数学家雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654~1705)在其遗著《猜想的艺术》(1713)一书中从形数的性质出发,获得一系列幂和公式,并用不完全归纳法得出一般公式.伯努利将图 6变形:第一列不变,第二列起,各列依次向下平移一位,二位,三位,…,并在空出的格子上填入零,如图 7所示.如记第 n行 m列所在的数为 a_{nm},则

$$a_{nm}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(m=2,3,\cdots).\tag{9}$$

伯努利发现,在第 m 列中,

$$\frac{a_{1m}+a_{2m}+\cdots+a_{nm}}{na_{nm}}=\frac{1}{m}.\tag{10}$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

……

图 7

当 $m=2$时,利用(9)和(10),得

$$\sum_{r=1}^{n}(r-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

亦即

$$\sum_{r=1}^{n}r-\sum_{r=1}^{n}1=\frac{1}{2}n(n-1).$$

因此,得

$$\sum_{r=1}^{n}r=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$

当 $m=3$时,利用(9)和(10),得

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2),$$

亦即

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}r^2-\sum_{r=1}^{n}\frac{3}{2}r+\sum_{r=1}^{n}1=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n).$$

于是得

$$\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{3}(n^3-3n^2+2n)+3\sum_{r=1}^{n}r-2\sum_{r=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

当 $m=4$时,利用(9)和(10),得

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

此即

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{6}r^3-\sum_{r=1}^{n}r^2+\sum_{r=1}^{n}\frac{11}{6}r-\sum_{r=1}^{n}1=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n).$$

因此得

$$\sum_{r=1}^{n}r^3=\frac{1}{4}(n^4-6n^3+11n^2-6n)+6\sum_{r=1}^{n}r^2-11\sum_{r=1}^{n}r+6\sum_{r=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

类似地,当 $m=5,6,7,\cdots$时依次可得

$$\sum_{r=1}^{n}r^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n,$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,\tag{11}$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n,\tag{12}$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2,\tag{13}$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n,\tag{14}$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2,\tag{15}$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n,\tag{16}$$

……

由此伯努利归纳得到

$$\sum_{r=1}^{n}r^p=\frac{1}{p+1}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{p}{2}An^{p-1}$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{p-3}$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{p-5}$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{p-7}$$
$$+\cdots,\tag{17}$$

其中 $A,B,C,D,\cdots$ 依次表示 $\sum_{r=1}^{n}r^2,\sum_{r=1}^{n}r^4,\sum_{r=1}^{n}r^6,\sum_{r=1}^{n}r^8,\cdots$ 公式中最后一项的系数,即

$$A=\frac{1}{6},B=-\frac{1}{30},C=\frac{1}{42},D=-\frac{1}{30},\cdots$$

后来欧拉将这些数称为伯努利数.伯努利自豪地说,借助于(16),他用不到半刻钟时间就求得了前 1000个自然数的 10次幂之和为

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

与伯努利同时代的日本数学家关孝和(1642～1708)在《括要算法》(1712)中研究(1)的一般公式.他

设想(1)的和是一个不含常数项的 n 的 $p+1$ 次多项式,且多项式系数与贾宪三角的第 $p+1$ 层有着对应关系:

$$(p+1)\sum_{r=1}^{n} r^{p} = n^{p+1} + G_1 C_{p+1}^{1} n^{p} + G_2 C_{p+1}^{2} n^{p-1} + \cdots + G_p C_{p+1}^{p} n. \quad (18)$$

在(18)两边令 $n=1$,得

$$p+1 = 1 + G_1 C_{p+1}^{1} + G_2 C_{p+1}^{2} + \cdots + G_p C_{p+1}^{p}.$$

取 $p=1,2,3,\cdots$,就可依次求出 $G_i\ (i=1,2,\cdots,p)$.关氏给出

$$G_1=\frac{1}{2},\ G_2=\frac{1}{6},\ G_4=-\frac{1}{30},\ G_6=\frac{1}{42},$$

$$G_8=-\frac{1}{30},\ G_{10}=\frac{5}{66},\cdots;\ G_3=G_5=G_7=\cdots=0.$$

显然,这里的 $G_2, G_4, G_6, G_8,\cdots$ 就是伯努利数 A. B. C. D,….

在我国,早在公元3世纪,著名数学家刘徽在注释《九章算术》时给出了公式(2),刘徽称等式右边为“中平之积”. 11世纪,著名科学家沈括(1031~1095)在《梦溪笔谈》中提出“隙积术”,其公式为

$$ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+(a+n-1)(b+n-1)$$
$$=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a). \quad (19)$$

其中 $c=a+n-1$, $d=b+n-1$.如令 $a=b=1$,即得(4). 13世纪,数学家杨辉在《详解九章算法》(1261)中明确给出公式(4),其形式为

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

杨辉又有三角垛求和公式

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2). \quad (20)$$

14世纪初,数学家朱世杰在《四元玉鉴》(1303)中对杨辉(20)作推广,并一一命名:

撒星形垛:

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

三角撒星形垛:

$$1+5+15+\cdots+\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)\cdots(n+4).$$

三角撒星更落一形垛:

$$1+6+21+\cdots+\frac{1}{5}n(n+1)\cdots(n+4)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\cdots(n+5).$$

一般地,

$$\sum_{r=1}^{n} C_{r+p-1}^{p} = C_{n+p}^{p+1}. \quad (21)$$

到了19世纪,著名数学家李善兰(1811~1882)在《垛积比类》中研究(1)的求和公式.李善兰发现,$r^p\ (r=1,2,\cdots)$可以用 p 个 p 乘三角垛来表示:

$$r=C_r^1,$$
$$r^2=C_{r+1}^2+C_r^2,$$
$$r^3=C_{r+2}^3+4C_{r+1}^3+C_r^3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$r^p=L_{p1}C_{r+p-1}^p+L_{p2}C_{r+p-2}^p+\cdots+L_{pp}C_r^p.$$

其中 $L_{p1}=L_{pp}=1\ (p=1,2,\cdots)$.当 $1<i<p$ 时,李善兰有递推公式

$$L_{pi}=(p-i+1)L_{p-1,i-1}+iL_{p-1,i}.$$

图8是李善兰所作系数表(第 p 层第 i 个数即为 L_{pi}):

1

1 1

1 4 1

1 11 11 1

1 26 66 26 1

1 57 302 302 57 1

1 120 291 2416 291 120 1

1 247 4293 15619 15619 4293 247 1

……

图 8

于是

$$\sum_{r=1}^{n} r^p = \sum_{r=1}^{n} L_{p1} C_{r+p-1}^{p} + \sum_{r=1}^{n} L_{p2} C_{r+p-2}^{p} + \cdots + \sum_{r=1}^{n} L_{pp} C_r^p.$$

由(21)即得

$$\sum_{r=1}^{n} r^p = \sum_{i=1}^{n} L_{pi} C_{n+p-i+1}^{p+1}. \quad (22)$$

参考文献

1 D. E. Smith. History of Mathematics (Vol2). Boston, 1925

2 D. E. Smith. Source Book in Mathematics (Vol1). New York, 1959

3 T. L. Heath. A History of Greek Mathematics. London, 1921

4 钱宝琮.中国数学史.北京:科学出版社,1964