2015 年 1 月 20 日

1（20 分）计算：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$，　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$，　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$，

(4) 选择合适的实数 a 和 b，使函数 $f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 在 $x\to 0$ 时为尽可能高阶的无穷小量.

2（10 分）画出函数 $y=\frac{x^2-5x+6}{x-4}$ 的图像，并讨论其临界点 (critical points)、极大/极小值、单调性、凸性、拐点以及渐近线.

3（20 分）计算：

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^3}\,dx$，　(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$，　(3) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$，　(4) $\displaystyle\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$.

4（10 分）设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2．求下列级数的收敛半径：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^kx^n$，　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{kn}$，　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n^2}$.

(4) 计算函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数.

其中，(1) 和 (2) 小题中的 k 是一个固定的正整数.

5 (10 分) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微，且 $f'\le 1/2$. 证明存在 $x\in\mathbb{R}$ 满足 $f(x)=x$，且这样的 x 是唯一的.

6（10 分）设函数 f 在 $(0,1)$ 上可微，在 $[0,1]$ 上连续，且 f' 在 $(0,1)$ 上递增，$f(0)=0$．证明 $g(x):=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上递增.

7（10 分）设 F 是 $[a,b]$ 上的可微函数且 $F'=f$. 证明 $f\in\mathcal{HK}[a,b]$，并且 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$. 并证明

(a) $f_1(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上可微；

(b) $f_2(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上连续；

(c) $f_3(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 是 HK-可积的，并计算 $\int_{-1}^{1} f_3(x)\,dx$.

8（10 分）对于 $f,g\in C[a,b]$，证明 Cauchy–Schwartz 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)\,dx$$

并运用该不等式证明如下结论：

(a) 若 $f\in C^1[a,b]$，且 $f(a)=0$，$c\in(a,b)$，则

$$f^2(c)\leq (c-a)\int_a^c (f'(x))^2\,dx.$$

(b) 若 $f\in C^1[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b (f'(x))^2\,dx.$$