第五章　　射影几何学初步

2016 年 1 月 11 日

射影几何

- 古老分支, 可追溯到公元前 – 绘图、建筑学, 透视法
- 十七世纪, 被德扎格 (Desarques)、帕斯卡 (Pascal) 等推广和发展
- 十九世纪, 形成体系, 成为几何的独立分支
- 在微分几何、代数几何等数学领域有着广泛的应用

本章主要内容 – 从几何的角度观察和分析

- 射影平面与交比
- 射影坐标系、射影坐标变换与射影变换

1　中心投影

- 仿射几何学: 从几何图形的度量性质中分划出仿射性质: 平行、简单比
- 射影几何学: 从几何图形的仿射性质中分划出射影性质: 点的共线、线的共点

例 1. 德扎格定理: 如果两个三角形的对应顶点的连线交于一点, 则它们对应边的交点共线.

例 2. 帕普斯 (Pappers) 定理: 设 A, B, C, A', B', C' 是两个共线点组, M 是直线 AB', $A'B$ 的交点, N 是直线 AC', $A'C$ 的交点, P 是直线 BC', $B'C$ 的交点, 则 M, N, P 共线.

两个例子的特点:

- 只涉及两条交点和连线;
- 度量工具, 如距离、夹角用不上;
- 仿射工具, 平行、简单比也用不上;
- 建立适当的仿射坐标架, 用坐标法也非常复杂;
- 题目有不明确的地方: 万一对应边没有交点呢?

定义 1. 设 π 和 π' 是两张相交的平面, 取定不在 π 和 π' 上的一点 O. 规定一个对应 τ 如下: 对 π 上的点 M, 把它对应到直线 OM 和 π' 的交点 M', 我们把 τ 称为以 O 为中心的 π 到 π' 上的中心投影.

- 定义不全: 过 O 平行于 π' 的平面与 π 的交线 l_0 上的任意点没有像点;
- 不是满射: 过 O 平行于 π 的平面与 π' 的交线 l_0' 上的任意点没有原像.
- 保持共线点组的共线性
- 不保持简单比
- 不保持平行性

2 射影平面

用中心投影证明德扎格定理的方法是不能用仿射理论来解释的, 因为中心投影不是仿射变换. 因为

$$\tau : \pi \setminus l_0 \mapsto \pi' \setminus l_0'.$$

因此要完善这种方法, 改善中心投影, 我们要将平面加以扩大.

2.1 中心直线把与扩大平面

定义 2. 取定空间中的一点 O, 把空间中所有经过 O 点的直线构成的集合称为以 O 点为中心的中心直线把, 简称 "把 O", 记作 $\mathcal{B}(O)$.

命题 1. π 到 π' 的中心投影 τ 可以分解为两个映射的复合: 设 i 是 π 到 $\mathcal{B}(O)$ 的映射, j' 是 $\mathcal{B}(O)$ 到 π' 的映射. 于是 $\tau = j' \circ i$. 注意到 i 不是满射, j' 不是定义在整个 $\mathcal{B}(O)$ 上.

注意到 $\mathcal{B}(O)$ 中的直线完全由它们的方向决定, 我们把直线的方向称为线向 (区别于向量的方向, 它可以用一个非零的向量来表示, 但是相反方向的向量表示用一个线向). 于是 $\mathcal{B}(O)$ 中的凡是线向平行于 π 的直线不在映射 i 的像集中. 凡是线向平行于 π' 的直线不在映射 j' 的定义域中.

定义 3. 把平面 π(作为点集) 扩大: 所有平行于 π 的线向作为新元素添加进来, 称这个扩大了的集合为 π 的扩大平面, 并记作 π_+.

- π_+ 是一个特殊的集合, 包含两种不同性质的元素
  - 普通的点
  - 平行于 π 的线向

定义 4. 映射 i 可以扩大为: $i_+ : \pi_+ \mapsto \mathcal{B}(O)$, 这是一个一一对应, 称为射影映射 (简称射影); 在射影映射下, 当点沿着平面 π 上的一条直线向着无穷远跑去时, 它的射影像的极限就是此直线的线向的射影像, 因此常常把直线的线向称为无穷远点.

定义 5. 同样 π' 也可扩大为 π'_+, 并规定 $\mathcal{B}(O)$ 中平行于 π' 的直线的像为它的线向, 此时, 映射 j' 可以扩大为: $j'_+ : \mathcal{B}(O) \mapsto \pi'_+$, 这也是一个一一对应, 称为截影.

这样经过补充定义的中心投影 $\tau_+ = j'_+ \circ i_+$ 是一个一一对应.

2.2 扩大平面和中心直线把上的“线”结构

定义 6. 在扩大平面上的“线”是 π_+ 上的下面两种子集:

(1) π 上的原来的直线添加上它的无穷远点成为 π_+ 的“线”(下称普通线);

(2) π_+ 的所以无穷远点构成的子集也看作 π_+ 的线, 成为 π_+ 的无穷远线.

定义 7. 经过 O 点, 并且在一张平面上的直线的集合, 称为中心直线束.

π 上的任何一条直线都决定了一个中心直线束, 通过 π 上直线到过 O 平面的一一对应, 我们知道将无穷远点集合定义为一条线的合理性 –这是平行于 π 的中心直线束.

定义 8. 在 $\mathcal{B}(O)$ 上, 我们也规定“线”的结构: 在统一中心直线束中的直线的集合成为 $\mathcal{B}(O)$ 中的一条“线”.

于是 $\mathcal{B}(O)$ 中的“线”集合和经过 O 点的平面集合又自然一一对应关系, 因此也可以把经过 O 点的平面束看成是 $\mathcal{B}(O)$ 的线.

2.3 点与线的关系

在扩大平面上, 线与点的关系有了变化:

- “两点决定一条直线”仍然正确, 但内涵更加丰富了;
- “任何两条不同的线都相交于一点”;
- 线束也不再分中心线束和平行线束, 后者也是经过一点;
- 点与线的关系变得对称了.
  - 线可以看作是点的集合;
  - 点与它决定的线束等同起来, 线属于点;
  - 点和线的从属关系变成是相互的, 以后我们改称点和线的关联关系.

在扩大平面上, 平行失掉了意义, 欧氏几何与仿射几何的许多概念不再适用, 如距离、夹角、简单比. 它们既在中心投影下不再保持, 也不能自然地引申到扩大平面上, 线段的概念也失去意义. 虽然我们也谈三角形, 但是边、角、内部等概念失去了意义, 只剩下三个不共线的点和三条不共点的线.

射影几何学正是研究只与图形的点线关联关系相关的几何性质.

2.4 射影平面的定义

定义 9. 一个具有线结构的集合 (即规定了它的哪些子集称为线) 称为一个射影平面, 如果存在从它到一个中心直线把的保持线结构的一一对应关系.

3 交比

3.1 普通几何中的交比

定义 10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是空间中 4 个共面的向量, 但两两不共线. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 对 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 有唯一的分解式.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_3 &= s_1\boldsymbol{\alpha}_1 + t_1\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 &= s_2\boldsymbol{\alpha}_1 + t_2\boldsymbol{\alpha}_2, \end{aligned}$$

其中 s_1, t_1, s_2, t_2 都不等于零. 把比值

$$\frac{s_2 t_1}{s_1 t_2}$$

称为这 4 个向量的交比, 记作 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$

显然交比与 4 个向量的顺序有关, 但是不同顺序的交比是互相决定的. 它们具有如下规律.

1. $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}$;
2. $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3; \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4) + (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 1$;
3. $(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4; \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$.

命题 2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是空间中两两不共线的 4 个共面的向量, k_1, k_2, k_3, k_4 是任意的 4 个非零常数, 则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2; k_3\boldsymbol{\alpha}_3, k_4\boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4).$$

定义 11. 设 l_1, l_2, l_3, l_4 是空间中 4 条平行于同一平面的直线, 并且它们两两不平行, 则规定它们的交比为

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4),$$

这里, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是平行于 l_i 的任意非零向量, $i = 1, 2, 3, 4$.

定义 12. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面上共线的 4 个不同的点, 规定它们的交比为

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{(A_1, A_2, A_3)}{(A_1, A_2, A_4)}.$$

点的交比与线的交比有密切的关系.

命题 3. 设 l_1, l_2, l_3, l_4 是平面 π 上经过点 P 的 4 条不同直线, l 是 π 上的不经过 P, 并且与 l_1, l_2, l_3, l_4 都相交的直线, 记 A_1, A_2, A_3, A_4 依次是它与 l_1, l_2, l_3, l_4 的交点, 则

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4).$$

反之, 亦然.

我们把上述命题称为点线交比的协调性.

命题 4. 如果 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 是空间中的 4 张都经过 l 的不同平面, π 和 l 平行, 记 l_1, l_2, l_3, l_4 依次是 π 与 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 的交线, 则 (l_1, l_2, l_3, l_4) 与 π 的选择无关.

定义 13. 我们把上述平面 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 的交比定义为

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (l_1, l_2, l_3, l_4).$$

于是面线交比也有协调性.

3.2 中心直线把和扩大平面上的交比

- 中心直线把上的交比
- 扩大平面上的交比 –射影

命题 5. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是扩大平面 π_+ 上的共"线"4 点. O 是空间中不在 π 上的点, 则交比 (OA_1, OA_2, OA_3, OA_4) 和 O 的选择无关.

定义 14. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是扩大平面 π_+ 上的共"线"4 点. O 是空间中不在 π 上的点, 规定 A_1, A_2, A_3, A_4 的交比为

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (OA_1, OA_2, OA_3, OA_4).$$

类似地, 可以定义扩大平面上共点 4 线的交比.

命题 6. 设 l_1, l_2, l_3, l_4 是扩大平面 π_+ 上的共点 4 线. O 是空间中不在 π 上的一点. 则交比 (Ol_1, Ol_2, Ol_3, Ol_4) 和 O 点的选择无关.

定义 15. 设 l_1, l_2, l_3, l_4 是扩大平面 π_+ 上的共点 4 线. O 是空间中不在 π 上的一点. 则规定 (l_1, l_2, l_3, l_4) 的交比为

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (Ol_1, Ol_2, Ol_3, Ol_4).$$

3.3 调和点列和调和线束

定义 16. 如果共线的 4 点的交比为 -1, 称它们为调和点列; 如果共点四线的交比为 -1, 就称它们为调和线束.

4 射影坐标系

1. 中心直线把与"三联比"的一一对应;
2. $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ 射影标架, l_i 称为基本点;
3. 当在 $\mathcal{B}(O)$ 中取定射影标架 $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ 后, 所得到的射影坐标是两个一一对应:
    - $\mathcal{B}(O)$ 中的点集合到全部三联比集合的一一对应;
    - $\mathcal{B}(O)$ 中的线集合到全部三联比集合的一一对应.
4. 对偶原理与对偶命题;
5. 射影坐标变换与射影变换.