第四章　　保距 (正交) 变换与仿射变换

2016 年 1 月 4 日

几何变换

- 研究几何对象 (点、向量、图形) 的变换
- 不同于 “坐标变换”– 集合对象不变
- 如: 平移、选择、反射、压缩等
- 主要研究几何对象在几何变换后几何性质的变换规律

1　平面的仿射变换与保距变换

1.1　一一对应与可逆变换

定义 1. $f : X \mapsto Y$ 称为映射, $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ 是 A 在 f 下的像, $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ 称为 B 在 f 下的原像.

定义 2. $f(x_1) \neq f(x_2)$ 如果 $x_1 \neq x_2 \in A$, 则 f 称为单射; 对任意 $y \in B$, 存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则 f 称为满射. 既是单射又是满射, 这个映射称为双射, 或者一一对应.

定义 3. $f(x) = x$ 对任意 $x \in X$ 成立, f 称为单位映射, 记作 id_X. $f \circ g = g \circ f = id_X$, 则 f 称为可逆映射, g 是其逆映射. 此时 $A = B$, f 称为可逆变换.

1.2　平面上的交换群

定义 4. 平面上给一个向量 $\boldsymbol{v}$, $P_{\boldsymbol{v}} : \pi \mapsto \pi$. 对任意 $A \in \pi$, $\overrightarrow{AP_{\boldsymbol{v}}(A)} = \boldsymbol{v}$. 称 $P_{\boldsymbol{v}}$ 为平移, $\boldsymbol{v}$ 为平移量

易知: $(P_{\boldsymbol{v}})^{-1} = P_{-\boldsymbol{v}}$.

定义 5. 取定平面上一点 O, 角度 θ, $r_O^\theta : \pi \mapsto \pi$. 对任意 $A \in \pi$, 使得 $r_O^\theta(A)$ 为 OA 绕 O 选择 θ 所得. 称 r_O^θ 为旋转, O 为旋转中心, θ 为旋转角.

易知: $(r_O^\theta)^{-1} = r_O^{-\theta}$. r_O^π 是以 O 为中心的中心对称变换.

定义 6. 取定平面上一条直线 l, $\eta_l : \pi \mapsto \pi$. 对任意 $A \in \pi$, $\eta_l(A)$ 是 A 关于 l 的对称点. 称 η_l 为反射, l 为反射轴.

易知: $(\eta_l)^{-1} = \eta_l$.

定义 7. 取定平面上一条直线 l, 一个正常数 k, $\xi_l^k : \pi \mapsto \pi$. 对任意 $A \in \pi$, $\overrightarrow{A\xi_l^k(A)} \perp l$, $d(\xi_l^k(A), l) = kd(A, l)$, A, $\xi_l^k(A)$ 位于 l 同侧. 称 ξ_l^k 为正压缩, l 为压缩轴, k 是压缩系数.

易知: $(\xi_l^k)^{-1} = \xi_l^{1/k}$. $\xi_l^1 = id_X$. $k > 1$ 时为拉伸, $0 < k < 1$ 时为常意收缩.

定义 8. 一个集合 G, 里面有一种满足结合律的运算 $*$, 如果:

1. G 中元素都可逆;
2. $a^{-1} \in G$, 对任何 $a \in G$ 成立;
3. $a * b \in G$, 对任何 $a, b \in G$ 成立.

则称 G 是一个群.

命题 1. 对于复合运算,

- 平移变换是一个群;
- 中心是定点的旋转变换也构成一个群;
- 上述所有变换及其复合也组成一个群.

1.3 保距变换

定义 9. 平面 pi 上的变换 f, 如果

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \qquad \forall A, B \in \pi,$$

f 称为 π 上的保距变换.

- 平移、选择、反射都是保距变换;
- $f = P_{\boldsymbol{v}} \circ \eta_l$ 是保距变换 (滑反射);
- 保距变换的复合仍然是保距变换.

定理 1. 保距变换可逆.

证明思路: 第一步单射, 这根据定义直接可得. 接着根据三角形两边之和大于第三边, 得知保距变换将三角形映射为三角形, 再根据单射, 可知不存在无原像的点. 是以证明是满射. 继而得知是双射.

1.4 仿射变换

定义 10. 平面 (空间) 的一个可逆变换, 如果将共线点组变为共线点组, 则称之为平面 (空间) 的一个仿射变换.

命题 2. 保距变换一定是仿射变换.

证明思路用到, 由于三角形两边之和大于第三边.

定义 11. 给定平面 π 上一点 O 及非零实数 λ, 变换 $f_O^\lambda : \pi \mapsto \pi$. 对任何 $P \in \pi$, $\overrightarrow{Of(P)} = \lambda \overrightarrow{OP}$. f_O^λ 称为位似变换, O 称为位似中心, λ 是位似系数.

显然, $f_O^1 = id_X$, $f_O^{-1} = r_O^\pi$. $(f_O^\lambda)^{-1} = f_O^{1/\lambda}$.

定义 12. $f^k : \pi \mapsto \pi$. 若

$$d(f(A), f(B) = kd(A, B), \quad \forall A, B \in \pi.$$

f^k 称为相似变换, k 称为相似系数.

位似变换是相似变换, 位似系数 λ, 相似系数 $|\lambda|$. 保距变换是相似变换, 相似系数为 1.

定义 13. $f_l^{\boldsymbol{v}} : \pi \mapsto \pi$. 对于任何 $P \in \pi$, $\overrightarrow{Pf(P)} = (d(P, l) \cdot \boldsymbol{v}.)$ $f_l^{\boldsymbol{v}}$ 称为错切变换.

显然 $(f_l^{\boldsymbol{v}})^{-1} = f_l^{-\boldsymbol{v}}$.

- 压缩变换是仿射变换
- 仿射变换的复合是仿射变换
- 位似变换是仿射变换
- 相似变换是仿射变换 (任何相似变换都是一个放射变换和一个相似变换的复合)
- 错切变换是放射变换

定理 2. 所有仿射变换构成了一个群.

证明思路: 只需证明在仿射变换下, 不共线的三点的像也不共线.

定理 3. 仿射变换保持直线的平行性.

2 仿射变换的基本定理

2.1 仿射变换决定的向量变换

定义 14. 设 f 是 π 上的仿射变换, 则对任何平行于 π 的向量 α, 规定

$$f(\alpha) = \overrightarrow{f(A)f(B)}, \quad \forall A, B \in pi \text{ 且 } \overrightarrow{AB} = \alpha.$$

称这是 f 决定的向量变换. 仍记作 f.

- $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 等价于 $f(\alpha) = \mathbf{0}$
- $f(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})$, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$
- $f(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda f(\boldsymbol{\alpha})$, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

命题 3. 仿射变换保持三点的简单比.

2.2 放射变换基本定理

定理 4. 设有平面 π 的两个仿射标架 $\mathrm{I}[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$, $\mathrm{II}[O',\boldsymbol{d}_1',\boldsymbol{d}_2']$, 存在且仅有一个放射变换使得: $f(P)$ 在标架 II 的坐标等于 P 在标架 I 的坐标, 对任意 $P\in\pi$.

命题 4. 有平面 π 上任意不共线的点组 A,B,C 和 A',B',C', 存在唯一仿射变换使得 $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$.

2.3 保距变换

定理 5. 将平面上任意三角形变为一个与之全等的三角形的仿射变换是保距变换.

命题 5. 任何保距变换都可以分解成平移、旋转及反射的复合.

2.4 变积系数

定理 6. 在同一仿射变换 $f:\pi\mapsto\pi$ 下. π 上不同的图形的面积的变化率相同, 即存在被 f 决定的参数 σ, 使得

$$\frac{|f(S)|}{|S|}=\sigma,$$

对任意 π 中的图形 S 成立.

3 用坐标法研究仿射变换

假设有仿射变换 f, 平面 π 上有两个仿射标架 $\mathrm{I}[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$, $\mathrm{II}[f(O),f(\boldsymbol{d}_1),f(\boldsymbol{d}_2)]$,
设 $(x,y)^\top$ 和 $(x',y')^\top$ 分别是 P 点在标架 I 和 II 的坐标, 则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

这里 $\left(A:=\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right)$, $(x_0,y_0)'$ 是 $f(O)$ 在 I 的坐标. $(a_{11},a_{21})^\top$, $(a_{12},a_{22})^\top$ 分别是 $f(\boldsymbol{d}_1'),f(\boldsymbol{d}_2')$ 的 I 坐标. 这里 A 称为仿射变换 f 的变换矩阵.

命题 6. 设 A 是仿射变换 f 的变换矩阵.

- A 一定是非奇异的
- A^{-1} 是 f^{-1} 的变换矩阵
- BA 是 $g\circ f$ 的变换矩阵
- 若 $|A|>0$, I 与 $f(\mathrm{I})$ 定向相同, 称 f 为第一类仿射变换; 反之为第二类仿射变换
- 变积系数 $\sigma=\frac{|f(\boldsymbol{d}_1)\times f(\boldsymbol{d}_2)|}{|\boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2|}=||A||$.

4 图形的仿射分类与仿射性质

4.1 平面上几何图形的仿射分类与度量分类

定义 15. Γ 和 Γ' 是平面上的两个几何图形, 若存在仿射变换 f, 使得 $f(\Gamma) = \Gamma$, 则称 Γ 和 Γ' 仿射等价.

度量等价也就是图形全等.

定义 16. 等价关系是指满足

- 自反性
- 对称性
- 传递性

的关系.

我们把互相仿射等价的归同一类, 称为仿射等价类. 类似的把互相度量等价的归一类, 称为度量等价类.

例 1. 全体三角形集合是仿射等价类, 全体椭圆也是仿射等价类

4.2 仿射概念与仿射性质

仿射概念有: 共线、相交、平行、简单比. 此外, 度量概念还有: 角度、垂直、长度、面积.

用仿射概念刻画的是仿射性质, 如三角形三条中心交于一点. 用度量概念刻画的是度量性质, 如三角形三条高交于一点.

注意到仿射性质必须是度量性质. 欧几里得几何中所提到的几何概念都是度量概念, 性质都是度量性质.