第二章　　空间中的平面、直线与常见曲面

2016 年 1 月 4 日

6　二次曲面

例 1. 求以三根坐标轴为母线的圆锥面的方程.

我们已经知道

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0,\quad x^2+2py=0$$

分别表示椭圆柱面, 双曲柱面和抛物柱面, 而二次方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

则表示二次锥面. 现在再研究几个二次方程表示的图形.

6.1　椭球面

(1) 椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

(2) 虚椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$;

(3) 点: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

6.2　双曲面

(4) 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

(5) 双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

6.3　抛物面

(6) 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$;

(7) 双曲抛物面: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

6.4　二次锥面

(8) 二次锥面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

6.5 二次柱面

(9) 椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(10) 虚椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$;

(11) 直线: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$;

(12) 双曲柱面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

(13) 一对相交平面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$;

(14) 抛物柱面: $x^{=}2py$;

(15) 一对平行平面: $x^2=a^2$;

(16) 一对虚平行平面: $x^2=-a^2$;

(17) 一对重合平面: $x^2=0$.

7 直纹面

定义 1. *一个曲面 S 称为直纹面, 如果存在一族直线, 使得这一族直线中的每一条都在 S 上, 并且 S 上的每一点都在这一族的某一条直线上, 这样的一族直线称为 S 的一族直母线.*

(a) 椭球面 (1)-(3) 不再是直纹面, 因为有界限;

(b) 二次锥面 (8) 是直纹面 (定义);

(c) 二次柱面 (9)-(17) 是直纹面 (定义);

(d) 双叶双曲面 (5) 不是直纹面, 因为与 Oxy 平面平行或者相交的每一条直线都不会全在 S 上;

(e) 椭圆抛物面 (6) 不是直纹面, 原因同上.

定理 1. *单叶双曲面 (4) 和双曲抛物面 (7) 都是直纹面.*

Proof. 首先分析单叶双曲面. 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$ 在单叶双曲面 S 上的充分必要条件是

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

因此

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right),$$

也即

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} & 1-\frac{y_0}{b} \\ 1+\frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

因为 $1+\frac{y_0}{b}$ 和 $1-\frac{y_0}{b}$ 不全为零, 所以方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)X+\left(1-\frac{y_0}{b}\right)Y & = & 0 \\ \left(1+\frac{y_0}{b}\right)X+\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)Y & = & 0. \end{cases}$$

上述一次齐次方程组, 必有非零解, 也即存在不全为零的实数 u_0, v_0 满足

$$\begin{cases} u_0\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)+v_0\left(1-\frac{y_0}{b}\right) & = & 0 \\ u_0\left(1+\frac{y_0}{b}\right)+v_0\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) & = & 0. \end{cases}$$

这表明 M_0 在直线

$$\begin{cases} u_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+v_0\left(1-\frac{y}{b}\right) & = & 0 \\ u_0\left(1+\frac{y}{b}\right)+v_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = & 0. \end{cases}$$

上.

下面考虑一族直线

$$\begin{cases} u\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+v\left(1-\frac{y}{b}\right) & = & 0 \\ u\left(1+\frac{y}{b}\right)+v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

u, v 可取任何常数. 如果 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 成比例, 则它们确定直线族(1)的同一条直线; 若不成比例, 则它们确定不同的直线. 所以直线族(1) 实际上只依赖于一个参数, 也即 u 和 v 的比值. 现在我们考虑直线族(1) 中的任何一条 $l_1(u_1, v_1)$, 并取直线上任一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)^\top$, 则容易验证 M_1 在单叶双曲面上. 证毕.

下面考虑双曲抛物面. 若它的方程是

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

则它有两族直母线:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda & = & 0 \\ z+\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)+z & = & 0 \\ 2\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & 0. \end{cases}$$

其中 λ 取所有实数. □

第三章　坐标变换

1　平面的仿射坐标变换

1.1　点的仿射坐标变换

平面上给了两个仿射坐标系: $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$ 和 $[O';\boldsymbol{d}'_1,\boldsymbol{d}'_2]$. 为了方便起见, 前一个称为旧坐标系, 简记为 I; 后一个称为新坐标系, 简记为 II. 点 M(或者向量 α) 在 I 中的坐标称为它的 I 坐标, 在 II 中的坐标称为它的 II 坐标.

设 II 的坐标原点 O' 的 I 坐标为 $(x_0,y_0)^\top$, II 的基向量 $\boldsymbol{d}'_1$ 和 $\boldsymbol{d}'_2$ 的 I 坐标分别是 $(a_{11},a_{21})^\top$, (a_{12},a_{22}). 现在我们来求 M 的 I 坐标 $(x,y)^\top$ 与它的 II 坐标 $(x',y')^\top$ 之间的关系.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=(x_0\boldsymbol{d}_1+y_0\boldsymbol{d}_2)+(x'd'_1+y'd'_2)\\
&= (x_0\boldsymbol{d}_1+y_0\boldsymbol{d}_2)+x'(a_{11}\boldsymbol{d}_1+a_{21}\boldsymbol{d}_2)+y'(a_{12}\boldsymbol{d}_1+a_{22}\boldsymbol{d}_2)\\
&= (a_{11}x'+a_{12}y'+x_0)\boldsymbol{d}_1+(a_{21}x'+a_{22}y'+y_0)\boldsymbol{d}_2,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x=a_{11}x'+a_{12}y'+x_0;\\ y=a_{21}x'+a_{22}y'+y_0.\end{cases}\tag{2}$$

公式(2)称为平面上坐标系 I 到 II 的点的仿射坐标变换公式. 它把任意一点 M 的 I 坐标 x,y 表示成 II 坐标 x',y' 的一次多项式.

定理 2. *平面上点的仿射坐标变换公式*(2) *中的系数行列式*

$$D:=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

我们不难计算得到坐标系 II 到 I 的点的仿射坐标变换公式

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{D}(a_{22}x-a_{12}y-a_{22}x_0+a_{12}y_0);\\ y'=\frac{1}{D}(-a_{21}x+a_{11}y+a_{21}x_0-a_{11}y_0).\end{cases}$$

1.2　向量的仿射坐标变换公式

假设向量 $\boldsymbol{v}$ 的 I 坐标为 $(u,v)^\top$, II 坐标为 $(u',v')^\top$. 则容易推得它们之间的关系:

$$\begin{cases} u=a_{11}u'+a_{12}v';\\ v=a_{21}u'+a_{22}v'.\end{cases}\tag{3}$$

公式(3)称为平面上坐标系 I 到 II 的向量的仿射坐标变换公式. 类似地, 可以推得 II 到 I 得向量得仿射坐标变换公式:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{D}(a_{22}x - a_{12}y); \\ v' = \frac{1}{D}(-a_{21}x + a_{11}y). \end{cases}$$

于是我们知道, 与点的坐标变换公式不同, 向量的坐标变换公式是一次齐次多项式 (即没有常数项). 平面上的点和向量是有本质区别的两种对象, 如果只从一个坐标系来看, 它们都是有序实数对, 看不出区别. 但是如果取两个坐标系 (它们的原点不重合), 通过坐标变换, 点和向量的区别就明显了.

2 平面直角坐标变换

这一节考虑直角坐标系 $\mathrm{I}[O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$, $\mathrm{II}[O', \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2']$.

2.1 直角坐标变换公式

设 O' 的 I 坐标为 $(x_0, y_0)^\top$, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ 的 I 坐标分别为 $(a_{11}, a_{21})^\top$, $(a_{12}, a_{22})^\top$, 则坐标系 I 到 II 的过渡矩阵是

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

定理 3. *设 I 和 II 都是直角坐标系, 则 I 到 II 的过渡矩阵 A 是正交矩阵, 并且坐标系 II 到 I 的过渡矩阵是 $A^\top$.*

2.2 直角坐标变换的过渡矩阵

尽管直角坐标系 I 到 II 的过渡矩阵 A 有四个数, 但是由于它是正交矩阵, 因此只有一个自由度.

平面上的仿射坐标系, 如果从 $\boldsymbol{d}_1$ 逆时针选择小于 180^o 的角便与 $\boldsymbol{d}_2$ 重合, 则称为右手系, 反之称为左手系.

假设 I 和 II 都是右手直角坐标系. 若 $\boldsymbol{e}_1$ 逆时针旋转 θ 角便与 $\boldsymbol{e}_1'$ 重合, 则有

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\langle e_1', e_1\rangle = \cos\theta; \\ a_{21} &= \cos\langle e_1', e_2\rangle = \sin\theta; \\ a_{12} &= \cos\langle e_2', e_1\rangle = -\sin\theta; \\ a_{22} &= \cos\langle e_2', e_2\rangle = \cos\theta. \end{aligned}$$

从而 I 到 II 的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

容易得到, $|A| = 1$.

若 I 是左手直角坐标系, II 是右手直角坐标系, 则 I 到 II 的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

定义 2. 平面 (或空间) 的两个坐标系, 如果它们都是右手系, 或者它们都是左手系, 则称它们是同定向的; 如果一个是左手系, 一个右手系, 则称它们是反定向的.

从上面讨论可以得到

命题 1. 设 I 和 II 都是平面的直角坐标系, I 到 II 的过渡矩阵是 A, 则 I 和 II 同定向的充分必要条件是 $|A| = 1$, 从而反定向的充分必要条件是 $|A| = -1$.

如无特别声明, 今后所取的直角坐标系都是右手系.

2.3　移轴公式和转轴公式

设 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{e}_1'$ 的转角为 θ, 则 I 到 II 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

若 $\theta = 0$, 则(4)成为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

称为移轴公式.

若 O 与 O' 重合, 则(4)成为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

称为转轴公式.

可见平面上任一右手直角坐标系都可以经过移轴和转轴得到.

3　几何空间的坐标变换

3.1　仿射坐标变换

定理 4. 设 $\mathrm{I}[O, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$ 和 $\mathrm{II}[O, \boldsymbol{d}_1', \boldsymbol{d}_2', \boldsymbol{d}_3']$ 都是空间的仿射坐标系, O' 的 I 坐标是 $(x_0, y_0, z_0)^\top$, $\boldsymbol{d}_j'$ 的 I 坐标是 $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})^\top$ $(j = 1, 2, 3)$. 则 I 到 II 的点的仿射坐标变换公式为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

I 到 II 的向量的仿射坐标变换公式为:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

称为 I 到 II 的过渡矩阵, 它的第 j 列坐标是 $\boldsymbol{d}_j (j = 1, 2, 3)$ 的 I 坐标.

定理 5. 仿射坐标系 I 到 II 的过渡矩阵 A 是非奇异的, 并且 I 与 II 同定向的充分必要条件是

$$|A| > 0.$$

由 G2-命题 6, 注意到

$$|A| = \frac{\boldsymbol{d}_1' \times \boldsymbol{d}_2' \cdot \boldsymbol{d}_3'}{\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{d}_3}.$$

3.2 直角坐标变换

定理 4 和定理 5 在直角坐标系中当然也成立. 但更进一步有:

定理 6. 设 I 和 II 都是直角坐标系, 则 I 到 II 的过渡矩阵 A 是正交矩阵, 并且坐标系 II 到 I 的过渡矩阵是 $A^\top$.

3.3 代数曲面 (线) 及其次数

定理 7. 若图形 S 在仿射坐标系 I 中的方程 $F(x, y, z) = 0$ 的左端是 x, y, z 的 n 次多项式, 则 S 在任意一个仿射坐标系 II 中的方程 $G(x', y', z') = 0$ 的左端是 x', y', z' 的 n 次多项式.

上述定理表明, 一个图形的方程的左端是否为多项式以及这多项式的次数与坐标系的选择无关, 它们都是图形本身的性质.

若图形 S 的方程的左端是多项式, 则称 S 是代数曲面, 并且把这个多项式的次数称为这个代数曲面的次数. 在平面上也有类似的性质. 我们据此可以化简平面 (空间) 中的二次曲线 (面), 并将其分类, 研究其性质. 具体内容在本课程略过, 有兴趣的同学可以参考相关教科书.