第二章　　空间中的平面、直线与常见曲面

2015 年 12 月 30 日

5　常见曲面

5.1　球面

定义 1. 到空间中一点 (球心) 距离等于一个正常数 (半径) 的所有点的集合, 我们称之为球面.

假设球心坐标为 $M_0(x_0, y_0, z_0)^\top$, 半径为 R. 于是点 $M(x, y, z)^\top$ 在球面上, 等价于

$$|\overrightarrow{M_0M}| = R,$$

也即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

化简上式可得如下三元二次方程组

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \tag{1}$$

这里 $b_1 = -x_0$, $b_2 = -y_0$, $b_3 = -z_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$. 我们发现上述方程没有交叉项 xy, yz, zx, 而且二次项系数. 但是并不是所有没有交叉项的三元二次方程都对应于一个球面. 对于任何形如(1)的三元二次方程, 我们有

a) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > c$ 时, 此方程对应于球心为 $(-b_1, -b_2, -b_3)^\top$, 半径为 $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c}$ 的球面;

b) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c$ 时, 此方程对于于一点 $(-b_1, -b_2, -b_3)^\top$;

c) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < c$ 时, 此方程没有轨迹 (虚球面).

球面还有参数方程

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta\cos\phi, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ y &= R\cos\theta\sin\phi, \quad \phi \in (-\pi, \pi]; \\ z &= R\sin\theta. \end{cases}$$

球面上每一个点 (除了 z 轴交点) 对应于唯一实数对 (θ, ϕ), 我们称之为曲纹坐标.

5.2 曲面、曲线的普通方程和参数方程

一般来说曲面的普通方程是一个三元方程 $F(x,y,z)=0$, 曲面的参数方程是含两个参数的方程:

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad a\le u\le b,\, c\le v\le d. \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

其中, 对于 $(u,v)^\top$ 的每一对值, 上述方程确定的点都在曲面上, 反之亦然. 由于这种一一对应关系, 于是我们称 $(u,v)^\top$ 为曲面的曲纹坐标.

几何空间中曲线的普通方程是两个三元方程联立:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

即几何空间中的曲线可以看成两个曲面的交线. 曲线的参数方程是含有一个参数的方程:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a\le t\le b. \\ z=z(t), \end{cases}$$

其中, 对于 t 的每一个值, 由上述方程确定的点都在曲线上，反之亦然.

5.3 旋转面

定义 2. *一条曲线 Γ(母线) 绕一条直线 l(轴) 旋转所得的曲面称为旋转面. 母线上每一个点绕轴旋转得到一个圆, 称为纬圆.*

对于一个旋转面, 它的母线不唯一, 旋转面上每一条与所有纬圆都相交的曲线均可作为母线.

假设轴 l 经过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^\top$, 方向向量为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)^\top$, 母线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

点 $M(x,y,z)^\top$ 在旋转面上的充分必要条件是 M 在经过母线 Γ 上的某一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$ 的纬圆上, 也即母线上有一点 M_0, M 和 M_0 到轴 l 的距离相等, 并且 $\overrightarrow{M_0M}\perp l$. 因此有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0, \\ |\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{v}|=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{v}|, \\ l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0. \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 x_0, y_0, z_0 就得到 x,y,z 的方程, 它就是旋转面的方程.

如果假设旋转面的轴为 z 轴, 母线 Γ 在 Oyz 平面上, 其方程为

$$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$$

则点 $M(x,y,z)^\top$ 在旋转面上的充分必要条件是

$$\begin{cases} F(y_0,z_0)=0, \\ x_0=0, \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2, \\ 1\cdot(z-z_0)=0. \end{cases}$$

消去参数 x_0, y_0, z_0, 得到

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是所求旋转面的方程.

5.4 柱面

定义 3. *一条直线 l(母线) 沿着一条空间曲线 C(准线) 平行移动时所形成的曲面称为柱面.*

按照定义, 平面也是柱面. 对于一个柱面, 它的准线和母线都不唯一, 但母线的方向唯一 (除平面外). 与每一条母线都相交的曲线均可作为准线.

设一个柱面的方向为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)^\top$, 准线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

点 $M(x,y,z)^\top$ 在柱面上的充分必要条件是 M 在某一条母线上. 即有准线 C 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$, 使得 M 在经过 M_0 且方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线上. 因此有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0, \\ x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 x_0, y_0, z_0, 得

$$\begin{cases} F(x-lt,y-mt,z-nt)=0, \\ G(x-lt,y-mt,z-nt)=0. \end{cases}$$

再消去参数 t, 得到 x, y, z 的一个方程, 它就是所求的柱面方程.

假设柱面的母线平行于 z 轴, 则必存在一条准线 C 在 Oxy 平面上, 不妨设其方程为

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$$

则点 $M(x,y,z)^\top$ 在柱面上的充分必要条件是

$$\begin{cases} F(x_0,y_0)=0, \\ z_0=0, \\ x=x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0+t. \end{cases}$$

消去参数 x_0, y_0, z_0, 得到

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=t, \end{cases}$$

由于参数 t 可取任意实数, 于是得到这个柱面的方程为

$$f(x,y)=0.$$

定理 1. *若一个柱面的母线平行于 z 轴 (x 轴或 y 轴), 则它的方程中不含 z(x 或 y). 反之亦然.*

5.5 锥面

定义 4. *在空间中由曲线 C(准线) 上的点与不在 C 上的一个定点 M_0(顶点) 的连接组成的曲面称为锥面. C 上的点与 M_0 的连线称为母线.*

一个锥面的准线并不唯一, 锥面上与每一条母线都相交的曲线都可以作为准线.

设一个锥面的顶点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$, 准线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

点 $M(x,y,z)^\top$ 在锥面上的充分必要条件是 M 在某一条母线上. 即有准线 C 上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^\top$, 使得 M_1 在直线 M_0M 上. 因此有

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z_1)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=0, \\ x_1=x_0+(x-x_0)t, \\ y_1=y_0+(y-y_0)t, \\ z_1=z_0+(z-z_0)t. \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 x_1, y_1, z_1, 得

$$\begin{cases} F(x_0+(x-x_0)t, y_0+(y-y_0)t, (z-z_0)t)=0, \\ G(x_0+(x-x_0)t, y_0+(y-y_0)t, (z-z_0)t)=0. \end{cases}$$

再消去参数 t, 得到 x, y, z 的一个方程, 它就是所求的锥面方程.

定义 5. $F(x,y,z)$ 称为 x,y,z 的 n 次齐次函数 (n 是整数), 如果

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z),$$

对定义域中的一切 x,y,z 以及任意非零实数 t 都成立. 此时, 方程 $F(x,y,z)=0$ 称为 x,y,z 的 n 次齐次方程.

定理 2. x,y,z 的 n 次齐次方程表示的曲面 (添上原点) 一定是以原点为顶点的锥面. 反之亦然.