第二章　　空间中的平面、直线与常见曲面

2015 年 11 月 23 日

1　仿射坐标系下的平面方程

1.1　平面的参数方程和普通方程

确定平面的条件:

(1) 不在一条直线上的三点;

(2) 一条直线和此直线外的一点;

(3) 两条相交的直线, 或者两条平行直线.

为了便于使用向量法, 我们用 "一个点和两个不共线的向量" 作为出发点.

假设我们取定仿射坐标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$. 已知一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$, 向量 $\boldsymbol{v}_1(x_1,y_1,z_1)^\top$ 和 $\boldsymbol{v}_2(x_2,y_2,z_2)^\top$, 且 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线, 那么与 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 平行且过 M_0 的平面 π 上的任何一点 $M(x,y,z)^\top$, 必须满足 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 共面, 于是存在唯一一对实数 λ, μ, 满足

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2.$$

用坐标写出即得

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda x_1+\mu x_2,\\ y=y_0+\lambda y_1+\mu y_2,\\ z=z_0+\lambda z_1+\mu z_2.\end{cases} \tag{1}$$

定义 1. (1) 称为平面 π 的参数方程, 其中 λ, μ 称为参数, 它们可取任意实数.

又因为 $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1 & x_2\\ y-y_0 & y_1 & y_2\\ z-z_0 & z_1 & z_2\end{vmatrix}=0,$$

也即

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

定义 2. (2)称为平面 π 的普通方程. 由于 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线, 于是 A, B, C 不全为零, 因此平面(2)是一个三元一次方程.

定理 1. 在几何空间中取定一个仿射坐标系, 则平面的方程必须是三元一次方程; 反之, 任取一个三元一次方程表示一个平面.

定理 2. 设平面 π 的方程是(2), 则向量 $\boldsymbol{\omega}(r, s, t)^\top$ 平行于平面 π 的充分必要条件是

$$Ar + Bs + Ct = 0.$$

推论 1. 设平面 π 的方程是(2), 则平面 π 平行于 x 轴 (y 轴, z 轴) 的充分必要条件是 $A = 0$ ($B = 0$ 或 $C = 0$); 平面 π 通过原点的充分必要条件是 $D = 0$.

1.2 两平面的相关位置

平面位置的三种可能

(1) 相交于一直线;

(2) 平行;

(3) 重合.

定理 3. 取定一个仿射标架, 设平面 π_1 与 π_2 的方程分别为

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

则,

(1) π_1 与 π_2 相交的充分必要条件是它们方程的一次项系数不成比例;

(2) π_1 与 π_2 平行的充分必要条件是它们方程的一次项系数成比例, 但常数项系数不与这些系数成比例;

(2) π_1 与 π_2 重合的充分必要条件是它们方程的所有系数成比例.

1.3 三平面恰交于一点的条件

定理 4. 设三个平面在仿射坐标系中的方程分别为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned}$$

则这三个平面恰交于一点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.4 有轴平面束

定义 3. 几何空间中经过一条直线的所有平面组成的集合称为有轴平面束, 那条直线称为平面束的轴.

定理 5. 在仿射坐标系中, 设相交于直线 l 的两个平面 π_1 和 π_2 的方程分别为,

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

则一个图形属于以 l 为轴的有轴平面束当且仅当这个图形的方程形如

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 λ, μ 是不全为零的实数.

2 直角坐标系中平面的方程, 点到平面的距离

2.1 直角坐标系中平面方程的系数的几何意义

确定一个平面的条件还可以是: 一个点和一个与这个平面垂直的非零向量. 与一个平面垂直的非零向量称为这个平面的法向量.

取一个直角标架 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$. 我们来求经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)^\top$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}(a, b, c)^\top$ 的平面 π 的方程. 于是点 $M(x, y, z)^\top$ 在平面 π 上的充分必要条件是 $\overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$, 从而 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, 于是

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

即

$$ax + by + cz + h = 0, \tag{3}$$

其中 $h = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. (3)就是所求平面的方程.

由此可见, 在直角坐标系中, 平面方程的一次项系数组成的列向量是这个平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标.

2.2 点到平面的距离

定理 6. 在直角坐标系中, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)^\top$ 到平面

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离为

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

设 M 为平面 π 外任一点 M_0 到 π 垂线的垂足, 则

$$\delta := \overrightarrow{M_0M} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||},$$

称为是点 M_0 到 π 的离差.

离差的正负号决定了 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是否同向, 进而我们知道所有坐标适合不等式

$$Ax + By + Cz + D > 0 \quad (\text{或} < 0)$$

的点都位于平面 π 的同一侧. 也即平面 π 把空间中所有不在 π 上的点分成了两个部分, 一部分使得 $Ax + By + Cz + D$ 为正, 另一部分使得 $Ax + By + Cz + D$ 为负. 这个结论在仿射坐标系也成立

2.3 两个平面的夹角

定义 4. 两个相交平面的夹角是指两个平面交成的四个二面角中的任一个. 两个平行 (或重合) 平面的夹角规定为 0 或 π.

命题 1. 两个相交平面的夹角等于两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle$, 或者其补角.

定理 7. 设在直角坐标系中, 平面 π_1 和 π_2 的方程分别为:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

则 π_1 和 π_2 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + B_1B_3}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3 直线的方程, 直线、平面间的位置关系

一个点和一个非零向量可以决定一条直线. 取定仿射坐标架 $[O; \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$. 已知一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)^\top$, 非零向量 $\boldsymbol{v}(X, Y, Z)^\top$, 则过点 M_0 且平行与 $\boldsymbol{v}$ 的直线 l 上的任一点 $M(x, y, z)^\top$ 满足 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, 于是存在唯一一个实数 t 满足

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \boldsymbol{v}.$$

用坐标写出为:

$$\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ. \end{cases} \tag{4}$$

定义 5. (4) 称为直线 l 的参数方程, 其中 t 称为参数, 它可取任意实数.

参数 t 的几何意义是点 M 在直线 l 上的仿射标架 $[M_0; \boldsymbol{v}]$ 中的坐标.

如果规定分母为零时, 分子也为零, 则(4) 等价于

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}. \tag{5}$$

定义 6. (5) 称为直线的标准方程 (或点向式方程).

如果知道直线 l 上的两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)^\top$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)^\top$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为 l 的一个方向向量, 因为 l 的方程可写为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

定义 7. (6) 称为直线的两点方程.

任意一条直线又可看成是某两个相交平面的方程. 设直线 l 是两个相交平面

$$\begin{aligned} \pi_1 : \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2 : \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

的交线, 则

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{7}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{8}$$

是直线 l 的普通方程.

我们容易由标准方程得到普通方程. 而普通方程转化为标准方程或者参数方程, 只需要知道如下性质: 坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^\top$$

的向量 $\boldsymbol{v}$ 与相交平面

$$\begin{aligned} \pi_1 : \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2 : \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

都平行. 由于 π_1 与 π_2 方程中的一次项系数不成比例, 于是 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. 上述结论在直角坐标系中, 即两个向量的外积与它们都垂直.

3.1 两条直线的位置关系

在仿射坐标系中, 假设两条直线 l_i $(i=1,2)$ 分别经过 $M_i(x_i,y_i,z_i)^\top$, 方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_i(X_i,Y_i,Z_i)$.

(1) l_1 与 l_2 重合的充分必要条件是: 存在实数 λ, μ, 使得 $\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\mu\boldsymbol{v}_1$.

(2) l_1 与 l_2 平行的充分必要条件是: 存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1$, 但对一切实数 μ, $\overrightarrow{M_1M_2}\neq\mu\boldsymbol{v}_1$.

(3) l_1 与 l_2 相交的充分必要条件是

$$\Delta:=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2-y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2-z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}=0,$$

且对一切实数 λ, 都有 $\boldsymbol{v}_2\neq\lambda\boldsymbol{v}_1$.

(4) l_1 与 l_2 异面的充分必要条件是 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 不共面, 即 $\Delta\neq 0$.

3.2 直线和平面的位置关系

在仿射坐标系中, 假设直线 l 经过 $M_0(x_0,y_0,z_0)^\top$, 方向向量为 $(X,Y,Z)^\top$, 平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

(1) l 在 π 上的充分必要条件是:

$$AX+BY+CZ=0, \qquad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

(2) l 与 π 平行的充分必要条件是:

$$AX+BY+CZ=0, \qquad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$$

(3) l 与 π 相交的充分必要条件是:

$$AX+BY+CZ=0.$$

此时, 将 l 的参数方程代入 π 的方程中去, 可以得到

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

进而得到交点坐标.

4 点、直线和平面之间的度量关系

本节均在右手直角坐标系中讨论.

4.1 点到直线的距离

定理 8. 设直线 l 经过 M_0, 方向向量为 $\boldsymbol{v}$, 则点 M 到 l 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

4.2 两条直线的距离

定义 8. 我们称两条异面直线上点之间的最短距离为两条直线的距离.

如果 $l_1 \parallel l_2$, 那么 l_1 上任一点到 l_2 的距离就是 l_1 与 l_2 的距离. 如果 l_1 与 l_2 相交或重合, 那么它们之间的距离为零.

定理 9. 设两条异面直线 l_1, l_2 分别经过点 M_1, M_2, 方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, 则 l_1 与 l_2 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot \boldsymbol{v}_1\times \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times \boldsymbol{v}_2|}.$$

4.3 两条直线的夹角, 直线和平面所成的角

定义 9. 两条直线所称的角规定为它们的方向向量夹角中不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那个角.

定义 10. 直线 l 与平面 π(l 不垂直于 π) 所成的角规定为 l 与它在 π 上的射影所成的角 θ. 当 $l\perp\pi$ 时, 直线 l 与平面 π 所成的角规定为 $\frac{\pi}{2}$.

命题 2. 假设 $\boldsymbol{v}$ 是 l 的方向向量, $\boldsymbol{n}$ 是 π 的法向量, 直线 l 与平面 π 所成的角 θ 满足

$$\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle|.$$

以上是解析几何第三次课讲义

作业

1. 设平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^\top$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)^\top$ 的线段交于点 M, 证明:
$$(M_1,M_2,M)=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

2. 在空间仿射坐标系中, 直线 l_1 与 l_2 分别有一般方程如下:
$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ x-y+2z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-z+1=0, \\ y+2z-2=0, \end{cases}$$
   (1) 写出经过 l_1, 且平行于 l_2 的平面的方程;
   (2) 求与 l_1, l_2 都共面, 并且平行于向量 $\boldsymbol{\omega}(1,2,1)$ 的直线的方程.

3. 证明: 任何与异面直线
$$l_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

和

$$l_2 : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0; \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases}$$

都相交的直线 l 的方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0; \\ \lambda_2(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \mu_2(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0, \end{cases}$$

其中 λ_1 与 μ_1 不同时为零, λ_2 与 μ_2 不同是为零.

4. 请证明定理 9.