第一章　　向量代数与几何空间的结构

2015 年 11 月 18 日

3　向量的内积

3.1　向量的投影

定义 1. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量, $\boldsymbol{e}$ 是一个非零向量, 作分解式 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, 使得 $\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}_2 \perp \boldsymbol{e}$, 则称 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 方向上的内投影 (值空间投影) 和外投影 (零空间投影), 分别记作 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}\boldsymbol{a}$.

由定义看出, 内投影和外投影都和 $\boldsymbol{e}$ 的大小无关, 只与其方向有关.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 记 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 为它们的几何夹角 (弧度介于 0 到 π 之间). 若记 $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}/|\boldsymbol{e}|$, 则有

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e} \rangle \boldsymbol{e}_0.$$

命题 1. 投影具有线性性质, 即

(1) 对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 有

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}\boldsymbol{b}, \qquad .$$

(2) 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 和实数 λ, 有

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{e}}^{\perp}\boldsymbol{a}.$$

3.2　内积的定义

定义 2. 两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的内积是一个实数, 记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中有零向量时, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$; 否则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle.$$

内积的几条简单性质:

(1) 把向量 $\boldsymbol{a}$ 与自己的内积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ 记作 $\boldsymbol{a}^2$, 于是 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

(2) 内积可以用来计算夹角

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|};$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

(3) 内积还具有对称性: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

3.3 内积的双线性性质

定理 1 (内积的双线性性). 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 有等式

(1) $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$;

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

例 1. 用内积运算证明余弦定理: $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}| \cos \angle C$.

例 2. 证明: 三角形三条高交于一点.

3.4 用坐标计算内积

命题 2. 在直角坐标系 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 中, 我们有

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0};$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1.$$

定理 2 (直角坐标系中两向量之内积等于其对应坐标乘积之和). 在直角坐标系 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 中, 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3), 则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

根据上面定理我们可以推得如下性质

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$
$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

此外, 对于空间内任意两个点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, AB 之间的距离为

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

定义 3. 我们把一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与直角标架中的基向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 所成的夹角 α, β, γ 称为方向 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 把方向角的余弦 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 称为方向 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

命题 3. 任意方向的方向余弦的平方和为 1, 即 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

4 向量的外积

4.1 向量外积的定义

定义 4. 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积 (记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$) 仍是一个向量, 它的长度规定为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| := |a||b|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

且当 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时, 它的方向规定为: 与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均垂直, 并且使 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},a\times b)$ 成右手系. 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

外积的几条简单性质:

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ 的充分必要条件是 $a\parallel b$ 共线 (并不能断定 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中必有一个为 $\mathbf{0}$);

(2) 平面的定向: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

4.2 向量外积的双线性性质

定理 3 (外积的双线性性). 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 有等式

(1) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

4.3 用坐标计算外积

命题 4. 在直角坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 中, 我们有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1;\\&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=0.\end{aligned}$$

定理 4 (直角坐标系中两向量之外积积的计算法则). 在直角坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 中, 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 (a_1,a_2,a_3) 和 (b_1,b_2,b_3), 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)^{\top},$$

进而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1\\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2\\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3\end{vmatrix}.$$

例 3. 假设 $\triangle ABC$ 的三个顶点在平面直角坐标系里的坐标依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$, 证明 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|.$$

5 向量的多重乘积

5.1 向量的二重外积

定义 5. 定义 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$, 以及 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的二重外积.

显然我们知道 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 不一定相等, 比如当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且不与 $\boldsymbol{c}$ 共线时, 前者为零向量, 而后者非零.

命题 5.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a};\\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

5.2 向量的混合积

定义 6. 定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积, 简记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

根据定义, 容易推得, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rangle$. 若由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 张成的平行六面体的体积为 V, 则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{cases} V, & \text{如果}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{成右手系};\\ -V, & \text{否则}.\end{cases}$$

向量混合积的几个性质:

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面;

(2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

注意: 外积运算的优先级高于内积运算.

例 4. 请证明拉格朗日恒等式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.$$

例 5. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 则 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 也不共面, 成右手系, 并且

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.$$

命题 6. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 中的坐标分别为 $(a_1,a_2,a_3)^\top$, $(b_1,b_2,b_3)^\top$, $(c_1,c_2,c_3)^\top$, 则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}(\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3).$$

以上是解析几何第二次课讲义

作业

1. 证明: 三角形的三条角平分线相交于一点.
2. 证明: 如果一个四面体有两对对棱互相垂直, 则第三对对棱也互相垂直, 并且三对对棱的长度的平方和相等. (提示: 对空间任意四点 A, B, C, D 证明:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} &= 0; \\ \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} &= 0.) \end{aligned}$$

3. 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 并且构成右手系, 且

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle = \frac{\pi}{3}.$$

   求 $\langle \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$.