解析几何选讲

解析几何指借助笛卡尔坐标系, 由笛卡尔、费马等数学家创立并发展. 它是用代数方法研究几何对象之间的关系和性质的一门几何学分支. ——摘自“百度百科”

(1) 与其说是“几何学的一门分支”，不如说是“几何学的**一种方法**”;

- 通过平面 (空间) 的**坐标系**，建立点与实数对之间的一一对应关系;
- 得到曲线或曲面与方程之间的对应关系;
- 用代数方法研究几何问题，或用几何方法研究代数问题.

(2) 核心思想: **数形结合**

(3) 分类: 平面解析几何、**空间解析几何**

(4) 参考教材:《解析几何》, 尤承业著, 北京大学出版社; 《解析几何》, 丘维声著, 北京大学出版社.

(5) 预计课时: 12 学时

- 向量代数与几何空间的结构
- 空间中的平面、直线与常见曲面
- 坐标变换与二次曲面的分类
- 正交变换与仿射变换
- 射影几何学初步

例 1 (帕斯卡 (Pascal) 定理). *圆锥曲线的任一内接六边形 (其顶点是两两不同的) 的三对对边的交点共线.*

第一章　　向量代数与几何空间的结构

2015 年 11 月 16 日

1　向量及其线性运算

1.1　向量的概念

定义 1. 既有大小、又有方向的量成为向量 (或矢量).

向量一般用粗体小写字母或希腊字母表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等. 与之对应, 细体字母表示数量.

在几何上, 一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一条用有向线段来表示, 其中用这条线段的长度 $|AB|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小. 用起点 A 到终点 B 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

规定长度相等并且方向相同的有向线段表示同一个向量.

例 2. 平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$。

几个概念:

(1) 向量的大小也称为向量的长度, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$;

(2) 长度为零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{0}$, 零向量是唯一方向不确定的向量;

(3) 与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等并且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量, 记作 $-\boldsymbol{a}$;

(4) 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反, 就说它们平行, 记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$; 我们约定零向量与任何向量都平行.

(5) 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向互相垂直, 就说它们垂直或正交, 记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 我们约定零向量与任何向量都垂直.

例 3. 对任一向量 $\boldsymbol{a}$ 和任取一点 A, 存在唯一的点 B, 使得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$. 并且

$$\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow A=B;\qquad \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.$$

1.2　向量的加法

定义 2. 对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 也就是

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

(1) 由这个公式定义的向量加法规则通常称为三角形法则;

(2) 向量的加法与起点的选择无关;

(3) 也可以从同一起点 O 作 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则容易看出 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$. 这称为向量加法的平行四边形法则.

命题 1 (向量加法运算所满足的规律). 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 有

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

定义 3. 向量的减法: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

1.3 向量的数量乘法

定义 4. 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 它的成都为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|:=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$, 由于 $|0\boldsymbol{a}|=0|a|=0$, 所以 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 同理, 对一切实数 λ, 都有 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

命题 2 (向量数乘所满足的规律). 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 任意实数 λ, μ, 有

(1) $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(3) 结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(4) 分配律 I: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(5) 分配律 II: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 4. 由定义, $\lambda\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$. 反过来, 如果 $\boldsymbol{a}\neq 0$, 并且向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{b}$ 一定是 $\boldsymbol{a}$ 的倍数. 只要令 $\lambda=\epsilon\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 这里

$$\epsilon=\begin{cases}1, & 当\boldsymbol{b}与\boldsymbol{a}同向时;\\ -1, & 当\boldsymbol{b}与\boldsymbol{a}反向时.\end{cases}$$

就有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 为方便起见我们把这个数 λ 记作 $\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}$. 需要注意的是, 这个记号只有当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 并且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时才有意义.

长度为 1 的向量称为单位向量. 如果 $\boldsymbol{a}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量, 称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位化.

1.4 共线 (共面) 的向量组

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算. 在几何问题中应用向量的线性运算时, 常常涉及到向量分解的概念.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ 是一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是一组实数, 称

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

为向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是这个组合的系数, 它也是一个向量. 如果向量 $\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合, 即存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 使得

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n,$$

就说 $\boldsymbol{b}$ 可对 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ 分解.

定义 5. *如果一组向量平行于同一直线, 就称它们共线; 如果一组向量平行于同一平面, 就称它们共面.*

向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ 共线 (面) 也就是: 当用同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA_i} = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $O, A_1, ..., A_n$ 共线 (面).

几个性质:

(1) 两个向量共线就是它们平行;

(2) 向量组共线也就是其中任何两个向量都平行, 向量组共面也就是其中任何三个向量都共面;

(3) 如果三个向量中有一个是零向量, 或者其中有两个共线, 则它们共面;

(4) 如果 $\boldsymbol{c}$ 可以对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 分解, 则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

定理 1 (向量共线定理). *若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 并且 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 则存在唯一的实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.*

推论 1. *向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是, 存在不全为零的实数 λ, μ, 使得*

$$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

定理 2 (向量分解定理). (1) *如果三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 并且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 则 $\boldsymbol{c}$ 可以对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 分解, 并且其分解方式唯一.*

(2) *如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 则任何向量 $\boldsymbol{d}$ 都可以对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 分解, 并且分解方式唯一.*

推论 2. *向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是, 存在不全为 0 的实数 λ, μ, ν, 使得*

$$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = 0.$$

2 几何空间的线性结构

假设 V 是几何空间中所有点组成的集合. 如果取定空间中的一个点 O, 以 O 为起点的向量称为定位向量. 于是定位向量组成的集合与 V 有一个一一对应关系: $\overrightarrow{OM}$ 对应于终点 M. 于是 V 也可以看成由所有定位向量所组成的集合. 由于向量的平移不变性, V 亦可看作所由向量所组成的集合.

2.1 向量和点的仿射坐标、直角坐标

由定理 2(2) 给出了几何空间 V 的线性结构: 即只要给出了 V 中的三个不共面的向量, 那么 V 中的所有向量就了如指掌了.

定义 6. 几何空间 V 中任意三个有次序的不共面向量 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 称为 V 的一组基. 对于几何空间中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 若

$$\boldsymbol{\alpha} = x\boldsymbol{d}_1 + y\boldsymbol{d}_2 + z\boldsymbol{d}_3,$$

则把三元有序实数组 (x, y, z) 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标, 记作

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad (x, y, z)^\top.$$

向量有了坐标后, 我们再对空间中的点也引进坐标.

定义 7. 几何空间中的一个点 O 和一组基 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 合在一起称为几何空间的一个仿射标架或仿射坐标系, 记作 $[O; \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$, 其中 O 称为原点. 对于几何空间中的任意一点 M, 把它的定位向量 $\overrightarrow{OM}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标称为点 M 在仿射标架 $[O; \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$ 中的坐标.

命题 3. 点 M 在 $[O; \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$ 中坐标为 $(x, y, z)^\top$ 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{d}_1 + y\boldsymbol{d}_2 + z\boldsymbol{d}_3.$$

取定一个仿射标架后, 由定理 2(2) 知, 几何空间中全体向量的集合与全体有序三元实数组的集合之间就建立了一一对应; 通过定位向量, 几何空间中全体点的集合与全体有序三元实数组之间也建立了一一对应.

取定仿射标架 $[O; \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3]$,

(1) 过原点 O 且分别以 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 为方向的有向直线分别称为 x 轴, y 轴, z 轴, 统称为坐标轴;

(2) 由每两根坐标轴决定的平面称为坐标平面, 它们分别为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面;

(3) 坐标平面将空间分为八个部分, 称为八个卦限 (二维空间中, 为象限);

(4) 右手四指 (拇指除外) 从 x 轴方向弯向 y 轴方向 (转角小于 π), 如果拇指所指的方向与 z 轴方向在 Oxy 平面的同侧, 则称此坐标系为右手坐标系, 简称右手系. 反之称为左手坐标系, 简称左手系.

定义 8. 如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直, 并且它们都是单位向量, 则 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 称为一个直角标架或直角坐标系.

注意到若单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直, 则它们一定不共面, 因此直角标架是特殊的仿射标架.

点 (或向量) 在直角坐标系中的坐标称为它的直角坐标, 在仿射坐标系中的坐标称为它的仿射坐标.

2.2 用坐标做向量的线性运算

取定仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$, 设 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(a_1,a_2,a_3)^\top$, $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(b_1,b_2,b_3)^\top$, 则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标是 $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)^\top$;

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标是 $(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)^\top$.

命题 4. 向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标.

2.3 三点共线的条件

定理 3 (三点共线的条件). 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在空间仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 中的坐标分别是 $(a_1,a_2,a_3)^\top$ 和 $(b_1,b_2,b_3)^\top$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

推论 3. 假设 A, B, C 三点的坐标分别为 $(x_1,y_1,1)^\top$, $(x_2,y_2,1)^\top$, $(x_3,y_3,1)$, 则 A,B,C 三点共线的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.4 线段的定比分点

定义 9. 对于线段 AB $(A\neq B)$, 如果点 C 满足 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$, 则称点 C 分线段 AB 成定比 λ.

根据定义, 我们知道

(1) 当 $\lambda>1$ 时, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向, 点 C 在线段 AB 的内部, 称 C 为内分点;

(2) 当 $\lambda<1$ 且 $\lambda\neq-1$ 时, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 反向, 点 C 在线段 AB 的外部, 称 C 为外分点;

(3) 当 $\lambda=0$ 时, 点 C 与点 A 重合;

(4) 假如 $\lambda=-1$, 则得 $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}$, 即 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$, 矛盾, 所以 $\lambda\neq-1$.

命题 5. 如果点 C 分线段 AB 成定比 λ, 并表示成 (A,B,C), 则有

(1) $(A,B,C)(B,A,C)=1$;

(2) $(A,B,C)+(A,C,B)=-1$.

命题 6. 设 A, B 的坐标分别是 $(x_1,y_1,z_1)^\top$, $(x_2,y_2,z_2)^\top$, 则分线段 AB 成定比 λ $(\lambda\neq-1)$ 的分点 C 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

例 5. 请用坐标法证明: 四面体对棱中点的连线交于一点.

例 6 (Menelaus 定理). 设点 P, R 分别内分 $\triangle ABC$ 的边 AB, CA 成定比 λ, ν; 点 Q 外分边 BC 成定比 μ, 证明:

$$\text{三点}\, P, Q, R\, \text{共线} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda\mu\nu = -1.$$

例 7 (Ceva 定理). 设点 P, Q, R 分别内分 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, CA 成定比 λ, μ, ν, 证明:

$$\text{三线}\, AQ, BR, CP\, \text{共点} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda\mu\nu = 1.$$

以上是解析几何第一次课讲义

作业

1. 设 A, B, C 是不在一直线上的三点, 证明: 点 M 在 A, B, C 决定的平面上的充分必要条件是, 存在实数 λ, μ, ν, 使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}, \qquad \text{且} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

   其中 O 是任意取定的一点.

2. 证明: 点 M 在 $\triangle ABC$ 内 (包括三条边) 的充分必要条件是, 存在非负的实数 λ, μ, ν, 使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}, \qquad \text{且} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

   其中 O 是任意取定的一点.

3. 在一个空间仿射坐标系中, 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的坐标依次为 $(x_1, y_1, z_1)^\top$, $(x_2, y_2, z_2)^\top$, $(x_3, y_3, z_3)^\top$, 证明: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 在一个空间仿射坐标系中, 点 A, B, C 的坐标依次为 $(x_1, y_1, z_1)^\top$, $(x_2, y_2, z_2)^\top$, $(x_3, y_3, z_3)^\top$, 证明: 若 A, B, C 共线, 则

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

   并请举例说明反之不一定成立.