# 中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 9

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 11 月 18 日，19:00-20:40

**作业** 1. 证明: 设 $r>0$, 在闭球 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid ||x||\le r\}$ 上连续的函数 $f$ 可以在该闭球上用多项式一致逼近.

**作业** 2. a) 函数 $\frac{1}{|x|}$ 是位于空间 $\mathbb{R}^3$ 的坐标原点的单位电荷产生的电场强度 $A=-\frac{x}{|x|^3}$ 的势. 我们知道,

$$\operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|^3}\right)=4\pi\delta,\quad \operatorname{div}\left(-\frac{qx}{|x|^3}\right)=4\pi\delta,\quad \operatorname{divgrad}\left(\frac{q}{|x|}\right)=4\pi\delta.$$

试据此阐明: 我们为什么认为函数 $U(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}d\xi$ 应该是满足 $\Delta U=-4\pi\mu$ 的. 验证: 它的确满足所写的泊松方程.

b) 高斯 -奥斯特格戈德斯基公式的物理推论, 即电磁场理论中已知的高斯定理, 说的是: 分布在空间 $\mathbb{R}^3$ 中的电荷产生的电场强度穿过封闭曲面 $S$ 的电通量等于 $\frac{Q}{\epsilon_0}$(见第 14 章 §1 第 2 段), 其中 $Q$ 是以 $S$ 为边界的区域中的全部电量, 试证这个高斯定理.

**作业** 3. 关于液体体积积分的微方法

空间中充满了运动的物质 (液体). 设 $v=v(t,x)$ 和 $\rho=\rho(t,x)$ 分别是物质在瞬时 $t$ 和点 $x$ 处的位移速度和密度. 我们将关注在初始瞬间充满区域 $\Omega_0$ 的物质的位移.

a) 把充满区域 $\Omega_t$ 的物质的质量表示成积分的形式, 并写出质量守恒定律. 这里 $\Omega_t$ 是初始瞬间占据 $\Omega_0$ 的物质至时刻 $t$ 时占据的区域.

b) 微分具体变化积分区域 (液体体积)$\Omega_t$ 的积分 $F(t)=\int_{\Omega_t}f(t,x)d\omega$, 试证:

$$F'(t)=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}d\omega+\int_{\partial\Omega_t}f<v,n>d\sigma,$$

期中 $\Omega_t$, $\partial\Omega_t$, $d\omega$, $d\sigma$, $n$, $v$, $<\cdot,\cdot>$ 分别是时刻 $t$ 的区域, 区域的边界, 在相应点处的体元, 面元, 单位外法线向量, 流速以及内积.

c) 试证, b) 中的 $F'(t)$ 可以表示成

$$F'(t)=\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}(fv)\right)d\omega.$$

d) 对比习题 a), b), c) 的结果, 导出连续性方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0$.

e) 设 $|\Omega_t|$ 是区域 $\Omega_t$ 的体积. 试证 $\frac{d|\Omega_t|}{dt}=f_{\Omega_t}\operatorname{div}v d\omega$.

f) 试证, 不可压缩流体的速度场 $v$ 是无散度的 ($\mathrm{div}v = 0$); 无散度条件是演化介质的任意部分都是不可压缩 (保体积) 的数学表示.

g) 哈密顿经典力学系统的相速度场 $(p, q)$ 满足哈密顿方程组 $p = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $q = \frac{\partial H}{\partial p}$, 其中 $H = H(p, q)$ 是系统的哈密顿函数. 试遵循李特尔伍德证明, 在哈密顿流动中相体积守恒. 同时验证, 哈密顿函数 $H$(能量) 沿流线 (轨道) 为常数.

**作业** 4. 证明: 没有零向量的正交向量组 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 必定是线性无关的.

**作业** 5. 设 $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ 是线性无关组, Gram-Schmidt 正交化产生:

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \psi_1/||\psi_1||; \\
\phi_2 &= \frac{\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} < \psi_n, \phi_k > \phi_k}{\left\| \psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} < \psi_n, \phi_k > \phi_k \right\|}, \qquad n = 2, ..., m.
\end{aligned}
$$

证明: $\{\phi_i \mid n = 1, ..., m\}$ 是规范正交组.

**作业** 6. 证明毕达哥拉斯定理:

1) 如果 $x_i$ 是正交向量系, 而且有 $x = \sum_i x_i$, 则有

$$||x||^2 = \sum_i ||x_i||^2.$$

2) 如果 $\{e_i\}$ 是规范正交向量系, 而且有 $x = \sum_i a_i e_i$, 则

$$||x||^2 = \sum_i |a_i|^2.$$

**解答作业** 1. 设 $r>0$, 在闭球 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le r\}$ 上连续的函数 $f$ 可以在该闭球上有用多项式一致逼近. 不失一般性, 设 $r<1$, 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果}|x|\le r;\\ \tilde{F}(x), & \text{如果}r<|x|\le 1;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

这里 $\tilde{F}$ 是线性的且满足 $F(x)$ 在 $|x|\le 1$ 上连续. 令

$$\Delta_n(x)=\begin{cases} \frac{(1-||x||^2)^n}{\int_{||x||\le 1}(1-||x||^2)^n dx}, & \text{如果}|x|\le 1;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

对任何 $\epsilon\in[0,1]$,

$$0\le\int_{\epsilon\le||x||\le 1}(1-||x||^2)^n dx\le (V^n(1)-V^n(\epsilon))(1-\epsilon^2)^n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2)^n\to 0,\quad n\to+\infty,$$

这里 $V^n(\epsilon)$ 为半径为 $\epsilon$ 的 $n$ 维球体积.

$F(x)$ 在 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le 1\}$ 上一致连续且有界, $\{\Delta_n(x) \mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 $n\to+\infty$ 时 $\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ 的 $\delta$ 型函数. 设

$$M:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x),$$

$\forall\epsilon>0$, 存在原点的邻域 $U_0(\epsilon)$, 对任意 $y\in U_0(\epsilon)$, 有

$$|F(x-y)-F(x)|<\epsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}|F*\Delta_n(x)-F(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Delta_n(y)dy-F(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))\Delta_n(y)dy\right|\\ &\le \int_{U_0(\epsilon)}|f(x-y)-f(x)|\Delta_n(y)dy+\int_{\mathbb{R}^n\setminus U_0(\epsilon)}|f(x-y)-f(x)|\Delta_n(y)dy\\ &< \epsilon\int_{U_0(\epsilon)}\Delta_n(y)dy+2\mu\int_{\mathbb{R}^n\setminus U_0(\epsilon)}\Delta_n(y)dy=\epsilon,\qquad n\to+\infty,\end{aligned}$$

对任意 $||x||\le 1$ 成立. 由卷积的对称性,

$$F*\Delta_n(x)=\int_{\mathbb{R}^n}F(y)\Delta_n(y)dy=\int_{||y||\le 1}F(y)\Delta_n(x-y)dy=\int_0^1 F(y)P_n(1-||x-y||^2)^n dy$$

是关于 $x$ 的多项式.

**解答作业** 2. 注意到 $\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\left(-\frac{x}{|x|^3}\right)$ 关于 $x\to 0$ 是 $\delta$ 函数族.

$$\mu(\xi)\begin{cases} q, & \text{如果}\xi=0;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

时, $U(x)=\frac{q}{|x|}$. 又势函数 $U(x)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上连续函数, 当 $x=0$ 时, $\Delta U(0)=-4\pi q\delta(0)=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\le\epsilon}-4\pi q\delta(x)dx=-4\pi q=-4\pi\mu(0)$; 当 $x\neq 0$ 时, $\Delta U(x)=-4\pi q\delta(x)=\int_{U_\epsilon(x)}-4\pi q\delta(x)dx=0=-4\pi\mu(x)$. 于是 $\Delta U=-4\pi\mu$, 故我们认为对一般的电荷密度分布函数 $\mu$, 泊松方程成立. 下证之.

(1) $x$ 非奇异点时, 即 $\mu(x)=0$, 则 $U(x)$ 是常义的, $\mathrm{divgrad}U(x)=0$. (2) $x$ 为奇异点, 取以 $x$ 为球心, 半径为 $\epsilon$ 的球 $B_\epsilon(x)$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_{B_\epsilon}\Delta U(x)dx &= \int_{B_\epsilon}\nabla\cdot\nabla U(x)dv=\oint_s\nabla U(x)ds=\oint_s\int_{\mathbb{R}^3}-\frac{\mu(\xi)(x-\xi)}{|x-\xi|^3}d\xi ds && (1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}-\mu(\xi)d\xi\oint_s\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}ds=\int_{B_\epsilon(x)}-4\pi\mu(\xi)d\xi, && (2)
\end{aligned}$$

这是因为

$$\oint\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}ds=\begin{cases}4\pi, & \text{如果}\xi\in B_\epsilon(x);\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

由势函数 $U(x)$ 的连续性及(1), 我们得到 $\Delta U(x)=-4\pi\mu(x)$. 结合 (1), (2) 证毕.

**解答作业** 3. a) $\mu(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}\rho(t,x)dv$ 由质量守恒定律:

$$\frac{\partial\mu(\Omega_t)}{\partial t}-\frac{\partial\int_{\Omega_t}\rho(t,x)dv}{\partial t}=0.$$

b) 设

$$\begin{aligned}
\Delta I &= F(t+\Delta t)-F(t)=\int_{\Omega_{t+\Delta t}}f(t+\Delta t,x)dw-\int_{\Omega_t}f(t,x)dw\\
&= \int_{\Omega(t+\Delta t)}\left(f(t,x)+\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\Delta t+O((\Delta t)^2)\right)dw-\int_{\Omega_t}f(t,x)dw\\
&= \int_{\Delta\Omega}f(t,x)dw+\Delta t\int_{\Omega_{t+\Delta t}}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dw+o(\Delta t).
\end{aligned}$$

当 $\Delta\Omega\to 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta\Omega}f(t,x)dw &= \int_{\partial\Omega_t}f\cdot<v,n>\cdot\Delta t d\sigma+o(\Delta t);\\
F'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\Delta\Omega}f(t,x)dw}{\Delta t}+\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}dw\\
&= \int_{\partial\Omega_t}f\cdot<v,n>d\sigma+\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}dw.
\end{aligned}$$

c) 由

$$\int_{\partial\Omega_t}f\cdot<v,n>d\sigma=\int_{\Omega_t}\mathrm{div}(f\cdot<v,n>)dv,$$

在 $\Omega$ 内, 上式可看出沿流线方向的积分, 则在 $\Omega_t$ 内, $v,n$ 同向, 因此

$$\int_{\Omega_t}\mathrm{div}(f\cdot<v,n>)dv=\int_{\Omega_t}\mathrm{div}(fv)dv,$$

代入 b) 即可.

d)

$$\frac{\partial \mu(\Omega_t)}{\partial t} = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) dv \right) = 0,$$

对任意的初始区域 $\Omega_0$ 成立, 于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

e) 在 c) 中令 $f(t,x) \equiv 1$, 则 $F(t) = \int_{\Omega_t} dw = |\Omega_t|$, 于是

$$\frac{d|\Omega_t|}{dt} = F'(t) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} v dw.$$

f) 对任意的初始区域 $\Omega_0$, 流体不可压缩则, $|\Omega_t| \equiv |\Omega_0|$, 于是 $\frac{d|\Omega_t|}{dt} = 0$, 进而 $\operatorname{div} v = 0$.

g) 略.

**解答作业** 4. 假设正交向量组 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 存在一组 $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

则

$$\langle a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n, x_i \rangle = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

根据正交性, 上式左端等于 $a_i ||x_i||^2$, 于是得到 $a_i = 0$, 对任意 $i = 1, 2, ..., n$.

**解答作业** 5. 可用归纳法验证, 略.

**解答作业** 6. 可以直接验证, 略.