中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 7

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 11 月 4 日，19:00-20:40

作业 1. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$$

在任何不包含 $t = 0$ 的闭区间上一致收敛，在包含 $t = 0$ 的长度大于零的闭区间上不是一致收敛.

作业 2. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x+t} e^{-tx} dx$$

关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

作业 3. 如果 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上绝对可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

作业 4. 证明：积分

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-t)^2} dx$$

是参数 $t \in \mathbb{R}$ 的连续函数.

作业 5. 证明：积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

在 $t \in [c, d]$ 上一致收敛的充分必要条件是：对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots\}$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,t)dx$$

在 $t \in [c, d]$ 上一致收敛.

作业 6. 利用等式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

证明：

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2xy dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-y^2}$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2xy dx = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt$.

作业 7. a) 设 $a>0$, $b>0$, 并利用等式

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx,$$

计算它右端的积分.

b) 设 $a>0$, $b>0$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos x dx.$$

c) 利用狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

和等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_a^b \sin xy dy = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx,$$

计算该等式右端的积分.

作业 8. 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right), \qquad (a>0, b>0)$$

其中 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数而且积分 $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对所有的 $c>0$ 都有意义.

作业 9. 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

解答作业 1. 不失一般性, 我们只考虑 t 取正值. 根据狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

我们知道对任意 $\epsilon > 0$, 存在 A_0, 使得对任意 $A > A_0$, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \epsilon.$$

当 $t > 0$ 时, 由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx = \int_{At}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

故取 $A > \frac{A_0}{t}$, 对于任意 $t \geq a$, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx \right| < \epsilon.$$

也即任何区间 $0 < a \leq t \leq b$ 上, 积分是一致收敛的.

下面考虑区间包含 $t = 0$ 的情形. 对于任何 $A > 0$, 当 $t \to 0^+$ 时,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx = \int_{At}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

因此, 当 t 充分小时, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx > \frac{\pi}{4}.$$

于是在区间 $0 \leq t \leq b\,(b > 0)$ 上, 积分不一致收敛.

解答作业 2. 首先, 由于

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x+t} e^{-tx} = 1,$$

因此 $x = 0$ 不是瑕点. 由于

$$\left| \int_0^A \sin 3x dx \right| = \left| \frac{1}{3} \int_0^{3A} \sin y dy \right| \frac{1}{3} |1 - \cos 3A| \leq \frac{2}{3}$$

有界. 而另一方面, $0 \leq t < +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-tx}}{x}$ 在 $x > 0$ 关于 x 递减, 并且当 $x \to +\infty$ 时, 它关于 t 一致趋于零, 这是因为当 $0 \leq t < +\infty$ 且 $x > 0$ 时, 我们有

$$0 < \frac{e^{-tx}}{x} < \frac{1}{x}.$$

故而由狄利克雷判别法知, 积分一致收敛.

解答作业 3. 由绝对可积知: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使有

$$\int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

于是

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nxdx\right| \le \left|\int_0^{A} f(x)\sin nxdx\right| + \frac{\epsilon}{3}.$$

首先考虑 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 中无瑕点的情形. 我们在 $[0,A]$ 中插入分点 $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_m = A$, 并设 $f(x)$ 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上的下确界为 m_k, 则

$$\int_0^A f(x)\sin nxdx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^t kf(x)\sin nxdx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^t k[f(x)-m_k]\sin nxdx + \sum_{k=1}^m m_k \int_{t_{k-1}}^t k\sin nxdx,$$

从而有

$$\left|\int_0^A f(x)\sin nxdx\right| \le \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k + \sum_{k=1}^m |m_k| \frac{|\cos nt_{k-1} - \cos nt_k|}{n} \le \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k + \frac{2}{n}\omega_k \Delta t_k |m_k|,$$

其中 ω_k 为 $f(x)$ 在区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上的振幅, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上可积, 故可取某一分法, 使得

$$\left|\sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

对于这样的分法, $\sum\limits_{k=1}^m |m_k|$ 为定值, 因此存在 N, 使得 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{2}{n}\omega_k \Delta t_k |m_k| < \frac{\epsilon}{3}$$

于是对上述选取的 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nxdx\right| \le \left|\int_0^{A} f(x)\sin nxdx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x)n\sin nxdx\right| \le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\sin nxdx = 0. \tag{1}$$

对于有瑕点的情形, 我们只需考虑有一个瑕点的情形, 且为 0, 于是对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得

$$\int_0^\eta |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

但是 $[\eta, A]$ 上无瑕点, 故应用上面结果, 存在 N, 使得 $n > N$ 时, 恒有

$$\left|\int_\eta^A f(x)\sin nxdx\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

同理得证(1).

解答作业 4.

$$F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-t)^2}dx=\int_{-t}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-t}^{0}e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{t}e^{-x^2}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

易知 $\int_0^t e^{-x^2}dx$ 是关于 t 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 证毕.

解答作业 5. 请参见作业 6 第 8 题.

解答作业 6. (2809) 略.

解答作业 7. (3788) 略.

解答作业 8. 对任何的 $A>0$, 有

$$\begin{aligned}&\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\\=&\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}dt=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\qquad (Aa<\xi<Ab).\end{aligned}$$

当 $A\to 0^+$ 时, $\xi\to 0^+$. 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性, 即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

解答作业 9. 记 $L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$, 根据

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)},$$

我们有

$$L=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x dx\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy.$$

由于被积函数 $\cos\alpha x e^{-y(1+x^2)}$ 连续, 且绝对值的积分

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\left|\cos\alpha x e^{-y(1+x^2)}\right|dx\le\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{pi}{2},$$

故原逐次积分可交换积分顺序, 得

$$L=\int_0^{+\infty}e^{-y}dx\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dy=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{-\alpha^2}{4y}}dy=\int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-\left[t^2+\frac{1}{t^2}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^2\right]}dt=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$