中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 6

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 10 月 28 日，19:00-20:40

作业 1. 求极限:

(a) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}dx$

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos(tx)dx$

作业 2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a),$$

对所有 $x\in(a,b)$ 都成立.

作业 3. 设 $0<a<b$, 计算积分

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx.$$

作业 4. 利用含参数积分的微分法证明: 当 $t\in(-1,1)$ 时有

$$\int_0^\pi\ln(1-2t\cos(x)+t^2)dx=0.$$

作业 5. 证明: 对任意实数 u 都有

$$\int_0^{2\pi}e^{u\cos(x)}\cos(u\sin(x))dx=2\pi.$$

作业 6. 证明: 在压缩映照不动点原理中的条件

$$d(\Phi(x),\Phi(y)\le qd(x,y)$$

不能用

$$d(\Phi(x),\Phi(y)<d(x,y)$$

来代替.

作业 7. 证明: 设 $f:X\mapsto X$ 是从完备的度量空间 (X,d) 到自身的映射, n 是正整数. 如果 $f^n:X\mapsto X$ 是压缩映射, 则 f 有唯一的不动点.

作业 8. 证明: 设函数 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times T$ 上连续, 则含参数的反常积分

$$F(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

在 $t\in T$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对于任何满足条件

$$b_n > a, \qquad b_n \to +\infty$$

的任意序列 $\{b_n\}$, 相应的函数序列

$$\phi_n(t)=\int_a^{b_n} f(x,t)dx$$

在集合 T 上是一致收敛的.

作业 9. 证明: 积分

$$F(t)=\int_0^1 x^{t-1}dx$$

在 $t\in(0,1)$ 是处处收敛的但不是一致收敛的.

解答作业 1. (a) 因为 $\sqrt{x^2+t^2}$ 是关于 x,t 在 $[-1,1]\times[-\infty,+\infty]$ 上的连续函数, 因此 $F(t)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}dx$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 上连续, 于是

$$\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}dx=\lim_{t\to 0}F(t)=F(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=2\int_{0}^{1}xdx=1.$$

(b) 因为 $x^2\cos(tx)$ 是关于 x,t 在 $[0,2]\times[-\infty,+\infty]$ 上的连续函数, 因此 $F(t)=\int_0^2 x^2\cos(tx)dx$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 上连续, 于是

$$\lim_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos(tx)dx=\lim_{t\to 0}F(t)=F(0)=\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{8}{3}.$$

解答作业 2. 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故它在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$, 即 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 于是

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{x}[f(t+h)-f(t)]dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]\\&\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

解答作业 3. 注意到, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}=b-a$ (洛必塔法则). 因此 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx$ 并不是广义积分, 补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0, 在 $x=1$ 处的值为 $b-a$, 则可理解为 $[0,1]$ 上连续函数的积分. 由于

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy,\qquad (0\le x\le 1)$$

而函数 x^y 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续 (不妨假设 $a<b$, 若 $b>a$ 同此理), 故有

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx=\int_0^1dx\int_a^b x^ydy=\int_a^b dy\int_0^1 x^ydx=\int_a^b\frac{dy}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

解答作业 4. 设 $I(t)=\int_0^\pi\ln(1-2t\cos x+t^2)dx$. 由于 $|t|<1$, 因此

$$1-2t\cos(x)+t^2\ge 1-2|t|+t^2=(1-|t|)^2>0,$$

因此 $\ln(1-2t\cos x+t^2)$ 是连续函数且具有连续导数, 从而可以在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数, 得

$$\begin{aligned}I'(t)&=\int_0^\pi\frac{-2\cos x+2t}{1-2t\cos x+t^2}dx\frac{1}{t}\int_0^\pi\left(1+\frac{t^2-1}{1-2t\cos x+t^2}\right)dx=\frac{\pi}{t}-\frac{1-t^2}{t}\int_0^\pi\frac{dx}{(1+t^2)-2t\cos x}\\&=\frac{\pi}{t}-\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\left(\frac{-2t}{1+t^2}\right)\cos x}=\frac{\pi}{t}-\frac{2}{t}\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{t}-\frac{2}{t}\cdot\frac{\pi}{2}=0.\end{aligned}$$

于是, 当 $|t|<1$ 时, $I(t)=C$, 又因 $I(0)=0$, 故 $C=0$, 从而 $I(t)\equiv 0$.

解答作业 5. 令 $F(u)=\int_0^{2\pi}e^{u\cos(x)}\cos(u\sin(x))dx$, 由连续性, 我们有

$$F'(u)=-\int_0^{2\pi}e^{u\cos(x)}\cos(x)\sin(u\sin(x))\sin(x)dx.$$

若令 $f(x)=e^{u\cos(x)}\cos(x)\sin(u\sin(x))\sin(x)$, 则 $f(2\pi-x)=-f(x)$, 因此 $F'(u)=0$, 进而 $F(u)=C$, 又因为 $F(0)=\int_0^{2\pi}1dx=2\pi$, $F(u)\equiv 2\pi$.

解答作业 6. 令 $\phi(x)=x+\frac{1}{x}:[1,+\infty)\mapsto[1,+\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$. 于是我们有

$$d(x,y)=\left(1-\frac{1}{xy}\right)|x-y|<|x-y|.$$

然而 $\{x_{k+1}=x_k+\frac{1}{x_k}\}$ 并不收敛.

解答作业 7. 首先 f^n 具有唯一不动点, 不妨设为 x_0, 则 $f^n(x_0)=x_0$. 另一方面, 记 $f(x_0)=x_1$, ..., $f(x_{n-1})=x_n$, 于是 $f^n(x_0)=x_n=x_0$. 另一方面, $f^n(x_1)=f(x_n)=f(x_0)=x_1$, 因此, x_1 也是 f^n 的不动点, 因此 $x_1=x_0$, 证毕.

解答作业 8. $F(t)$ 一致收敛的充分必要条件是: 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\Delta>a$, 对任意 $a_2>a_1>\Delta$, 有

$$\left|\int_{a_1}^{a_2}f(x,t)dx\right|<\epsilon,\qquad \forall t\in T.$$

因为 $b_n\to+\infty$, 存在 N, 使得 $b_n>\Delta$ 对任意 $n\geq N$. 因此

$$|\Phi_n(t)-\Phi_m(t)|=\left|\int_{b_n}^{b_m}f(x,t)dx\right|<\epsilon,\qquad \forall t\in T$$

对任何 $m>n>N$ 成立, 因此 $\{\Phi_n(t)\}$ 一致收敛.

反之, 对任意 $\epsilon>0$, 取 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$, 满足

$$\sup_n|b_n-b_{n+1}|=\frac{\epsilon}{4M},$$

这里 $M=\max\limits_{(x,t)\in[a,+\infty)\times T}f(x,t)$. 由于 $\{\Phi_n(t)\}$ 一致收敛, 存在足够大的 $N>0$, 对任意 $m>n>N$, 有

$$|\Phi_n(t)-\Phi_m(t)|=\left|\int_{b_n}^{b_m}f(x,t)dx\right|<\frac{\epsilon}{2},\qquad \forall t\in T$$

成立. 于是对任意 $a_2>a_1>b_N$, 有 a_1 和 a_2 分别落在 $[b_{n-1},b_n]$ 和 $[b_m,b_{m+1}]$ 内, 于是

$$\left|\int_{a_1}^{a_2}f(x,t)dx\right|<\left|\int_{a_1}^{b_n}f(x,t)dx\right|+\left|\int_{b_n}^{b_m}f(x,t)dx\right|+\left|\int_{b_n}^{b_m}f(x,t)dx\right|<\epsilon$$

对任意 $t\in T$ 成立.

解答作业 9. 令 $F(t)=\int_0^1x^{t-1}dx$, 我们发现在 $t\in(0,1)$, $F(t)$ 都是收敛的. 但在 $y=0$, $y=1$ 上发散, 于是根据推论 19.2.7, 反常积分在 $(0,1)$ 不是一致收敛的.