中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 5

课程教师: 袁亚湘　　助教: 刘歆

2015 年 10 月 21 日，19:00-20:40

作业 1. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R_a, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径为 R_b. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_n) z^n$ 的收敛半径不小于 $R_a R_b$.

作业 2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 而且 c_n 都是非负实数.

1) 证明:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$$

2) 利用 1) 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

作业 3. 设 a 是一个非零复数. 请写出函数 $\frac{1}{a-x}$ 在 $z_0 = 0$ 处的泰勒级数, 并求该级数的收敛半径.

作业 4. 求函数 $\frac{1}{(1-z)(2-z)}$ 的麦克劳林级数.

作业 5. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在 z_0 处解析, 证明

(a) $f(z) + g(z)$ 在 z_0 处解析;

(b) $f(z)g(z)$ 在 z_0 处解析;

(c) 如果 $g(z_0) \neq 0$, 则 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 也在 z_0 处解析.

作业 6. 如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 而且

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

请证明: 对所有的 $x \in [0,1]$ 都有 $f(x) = 0$.

作业 7. 试证: 由函数对 $\{1, x^2\}$ 生成的代数 (即由他们作代数运算得到的所有函数) 在区间 $[-1,1]$ 上全体偶连续函数的集合中是稠密的.

作业 8. 设 K 是复平面上的单位圆 $\mathcal{B}_1 = \{z \in \mathcal{C} \mid |z| = 1\}$, 再设 $\mathcal{A}$ 是所有形为

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad (\theta\text{是实数})$$

的函数组成的代数, 请证明: $\mathcal{A}$ 能分离 K 上的点且在 K 上不消失, 但是依然有 K 上的连续函数不属于 $\mathcal{A}$ 的一致闭包.

解答作业 1. $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_nb_n \le \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to+\infty} b_n$, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)z^n$ 的收敛半径不小于 R_aR_b.

解答作业 2. (1) 首先, 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nR^n < +\infty$, 则根据

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

而 $\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\}$ 在 $[0,R]$ 中是单调递减且一致有界, 由 Abel 定理, 知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 一致收敛, 于是知级数在 $x=R$ 处左连续.

另一方面, 如果 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 存在, 也即和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $[0,R)$ 内一致有界, 故存在 $M>0$, 使得

$$S(x)\le M, \qquad \forall x\in[0,R).$$

考虑 $S_N(x)=\sum\limits_{l=1}^{N} a_lx^l$, 由于对任意 $x\in[0,R)$ 有

$$S_N(x)\le S(x)\le M,$$

于是 $\lim\limits_{x\to R^-} S_N(x) = \lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{l=1}^{N} a_lx^l = \sum\limits_{l=1}^{N} a_lR^l \le M$. 这说明 $S_N(R)$ 对 N 单调上升且有上界, 于是 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(R)$ 存在, 也即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nR^n$ 收敛.

(2) 因为

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

收敛半径是 1, 且在 $x=1$ 处发散.

解答作业 3.

$$f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}},$$

收敛半径为 $|a|$.

解答作业 4. 根据作业 3, 我们有

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n.$$

解答作业 5. (a) 用定理 18.3.4; (b) 用定理 16.2.3; (c) 用 $g(z)$ 在 z_0 邻域内的有界性以及 (b).

解答作业 6. 假设 $\mathcal{A}$ 是 $[0,1]$ 所有满足

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

的连续函数 $g(x)$ 的集合, 显然 $\mathcal{A}$ 是代数, 不消失, 而且可以分离 K, 所以根据 Stone 韦尔斯特拉斯定理, $\mathcal{A}$ 包括所有实连续函数, 于是 $f\in\mathcal{A}$, 于是 $\int_0^1 f(x)^2dx=0$, 于是 $f(x)\equiv 0$.

解答作业 7. 将分离定义改成: "我们称集合 X 上的函数族 S 能分离 X 的点, 如果对任意两点 $x_1, x_2 \in X$, $|x_1| \neq |x_2|$, 存在 $f \in S$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$". 同理可证定理 18.5.11 和 18.5.12.

解答作业 8. 取 $c_n = 0$ $(n = 0, 2, 3, ...)$, $c_1 = 1$, 于是 $f(z) = z \in \mathcal{A}$, 容易验证, 此函数在单位圆 $\mathcal{B}_1$ 上即是单射, 又非零, 因此 $\mathcal{A}$ 能分离 $\mathcal{B}_1$ 又不消失. 下面证 $h(z) := \bar{z} \notin \mathcal{A}$.

对任何 $f \in \mathcal{A}$, 我们有

$$\int_{\mathcal{B}_1} f(z) z dz = 0,$$

这是因为 $f(z)$ 可展开成多项式.

另一方面 $\int_{\mathcal{B}_1} \bar{z} z dz = \int_{\mathcal{B}_1} 1 dz = 2\pi \neq 0$, 因此 $\bar{z} \notin \mathcal{A}$. 证毕.