中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 4

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 10 月 14 日，19:00-20:40

作业 1. 设 $\mathcal{F} = \{f(x)\}$ 是定义在度量空间 X 的子集 E 上的一族函数. 我们称 $\mathcal{F}$ 在 $x_0 \in E$ 上等度连续, 如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in E, d(x, x_0) < \delta, \forall f \in \mathcal{F},$$

这里 $d(\cdot, \cdot)$ 是 X 的度量. 证明: 如果 $\mathcal{F}$ 在紧集 K 上的任意一点都是等度连续 (根据本题的定义), 则 $\mathcal{F}$ 在 K 上等度连续.

作业 2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是一致有界的函数序列. 这些函数都在 $[a, b]$ 上黎曼可积. 令

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad X \in [a, b]$$

证明: 存在子序列 $\{F_{n_i}(x), i = 1, 2, \cdot\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

作业 3. 定义函数

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{如果} t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ 3t - 1 & \text{如果} t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 1 & \text{如果} t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

然后将 $\phi(t)$ 的定义扩充到整个实数轴上使其为周期为 2 的偶函数:

$$\phi(t) = \phi(-t), \quad \phi(t + 2) = \phi(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

定义曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, 其中

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}t)}{2^n}, \quad t \in [0, 1]$$

证明曲线 $\{r(t) \mid t \in [0, 1]\}$ 填满了二维平面上整个正方形: $[0, 1] \times [0, 1]$.

作业 4. 如果 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 而且

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdot$$

证明: 对所有的 $x \in [0, 1]$ 都有 $f(x) = 0$.

作业 5. 使用复数的几何解释:

(a) 解释不等式 $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ 和 $|z_1+\cdots+z_n| \leq |z_1|+\cdots+|z_n|$;

(b) 指出复平面 $\mathbb{C}$ 上满足关系式 $|z-1|+|z+3| \leq 3$ 的点的几何位置.

作业 6. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛但不绝对收敛, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 1.

作业 7. 构造一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 使其在任何非零的 $z \in \mathbb{C}$ 处都发散.

作业 8. 证明: 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R_1, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径为 R_2, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n+b_n) z^n$ 的收敛半径为 $\min\{R_1, R_2\}$.

当堂小测验 2

测验 1. 设 $f \in C[0,1]$. 如果存在正整数 k, 使得

$$\int_0^1 f(x) x^{kn} dx = 0, \qquad (n=1,2,...),$$

证明: $f(x) \equiv 0$ in $[0,1]$.

测验 2. 设 $f \in C[-1,1]$. 证明:

(1) 如果

$$\int_{-1}^1 f(x) x^{2n+1} dx = 0, \qquad (n=0,1,2,...),$$

那么 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 如果

$$\int_{-1}^1 f(x) x^{2n} dx = 0, \qquad (n=0,1,2,...),$$

那么 $f(x)$ 是奇函数.

测验 3. 设 $f \in C[1,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} = l$ 存在且有限. 证明: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x) - P\left(\frac{1}{x}\right)| < \epsilon, \quad \forall 1 \leq x < +\infty.$$

测验 4. 设 $f \in C[a,b]$. 试证明: 存在递增的多项式序列

$$P_1(x) \leq P_2(x) \leq \cdots \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \cdots \qquad \forall x \in [a,b],$$

使得 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

解答作业 1. 反证法, 假设不等度连续, 则存在 ϵ, 对任意 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 存在 $x_n, y_n \in K$ 并且 $||x_n - y_n|| \le \delta_n$, 满足

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon, \quad n \in N$$

由于 K 是紧集, 因此 $\{x_n\}$ 有收敛子列不妨设为 $\{x_{n_j}\}$, 且

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \tilde{x}.$$

同样地 $\{y_{n_j}\}$ 也有收敛子列, 不妨设为 $\{y_{n_{j_i}}\}$, 且

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_{j_i}} = \tilde{y}.$$

不难由连续性得

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \ge \epsilon,$$

另一方面, $\tilde{x} = \tilde{y}$, 矛盾. 因此命题得证.

解答作业 2. 我们可以证明 $F_n(x)$ 是连续函数及逐点有界. 由于 $f_n(x)$ 一致有界, 设为 M, 对任意 $\epsilon > 0$, 令 $\delta = \epsilon/2M$, 对任意 $|x - y| < \delta$, 及 $n = 1, 2, ...$, 有

$$|F_n(x) - F_n(y)| \le \left|\int_x^y f_n(t)dt\right| \le M|x - y| < \epsilon.$$

因此 $\{F_n(x)\}$ 等度连续, 根据定理 17.5.5, 命题得证.

解答作业 3. $\forall a, b \in [0, 1]$, 将 a, b 用二进制表示为

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \qquad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

定义 $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$. 取

$$t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n}.$$

则

$$x(t_0) = a, \qquad y(t_0) = b.$$

解答作业 4. 首先存在多项式函数 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 也即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N$, 有下式成立

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

另一方面根据题设, 我们有

$$\int_0^1 f(x)P_n(x) = 0.$$

于是对任意 $n > N$, 有

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \quad = \quad \int_0^1 f(x)P_n(x)dx + \int_0^1 f(x)(f(x) - P_n(x))dx$$

$$\leq \quad 0+\int_0^1 |f(x)||f(x)-P_n(x)|dx \leq \frac{M}{n},$$

这里 $M=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ (连续函数在紧集内存在极大值), 根据 n 的任意性, 不难得出

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0.$$

于是 $f(x)\equiv 0$.

解答作业 5. (a) 三角不等式. (b) 一般是以 $z=1$ 和 $z=-3$ 为两个焦点, 3/2 为长轴的椭圆内部, 但这个是空集, 因为 $c=4/2>a$.

解答作业 6. 假设收敛半径大于 1, 则存在 $||z||>1$ 收敛, 由 Abel 定理知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 矛盾. 所以收敛半径小于等于 1. 如果收敛半径小于 1, 则由 Cauchy-Hadamard 定理知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 发散, 矛盾. 所以收敛半径等于 1.

解答作业 7. 令 $c_n=n^n$, 显然收敛半径是 0.

解答作业 8. 题目应为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|c_n|+|b_n|)z^n$, 否则 $c_n=-b_n$, 收敛半径为 $+\infty$. 如果是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|c_n|+|b_n|)z^n$, 则由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 由极限的夹逼定理可知

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|+|b_n|}=\min\{R_1,R_2\}.$$