中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 16

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2016 年 1 月 6 日，19:00-20:40

作业 1. 试证: 如果 $\alpha > 0$, 则当 $x \to +\infty$, 有

$$\int_{\alpha}^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\alpha}}} x^{\frac{1}{2\alpha}} e^{\frac{\alpha}{e} x^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

作业 2. a) 求积分

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt, \quad \text{当} \, n \to +\infty$$

的渐近式的主项.

b) 利用所得的结果和恒等式 $k! n^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^k dt$ 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n^k k! n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} (1 + O(n^{-1})), \quad \text{当} \, n \to +\infty.$$

作业 3. 设 $f \in C^{(1)}([a,b], \mathbb{R})$, $S \in C^{(2)}([a,b], \mathbb{R})$, 在 $[a,b]$ 上 $S(x) > 0$. 如果对所有的 $x \in [a,b)$ 都有 $S(x) < S(b)$, $S'(b) > 0$, $f(b) \neq 0$, 则积分

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)(S(x))^{\lambda} dx$$

当 $\lambda \to +\infty$ 有渐近展开式

$$F(\lambda) = \frac{f(b)}{S'(b)} [S(b)]^{\lambda+1} \lambda^{-1} [1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})].$$

解答作业 1. 对固定 x, 存在充分大的 M, 使得 $\int_M^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x dt$ 是小量, 然后使用定理 21.2.8.

解答作业 2. 同上可分析.

解答作业 3. 做变换 $\bar{f}(x) = f(a+b-x)$; $\bar{S}(x) = S(a+b-x)$, 利用定理 21.2.8 得证.