中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 15

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 12 月 30 日，19:00-20:40

作业 1. (一致渐近估计), 设 X 是一个集合, B_X 是 X 中的基, 还设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在集合 X 上且依赖于参数 $y \in Y$ 的 (向量值) 函数. 记 $|f(x,y)| = \alpha(x,y)|g(x,y)|$. 称在基 B_X 下的渐近关系

$$f(x,y) = o(g(x,y)), \quad f(x,y) = O(g(x,y)), \quad f(x,y) \sim g(x,y)$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的, 如果在基 B_X 下分别成立 $\alpha(x,y) \rightrightarrows 0$ 在 Y 上, $\alpha(x,y)$ 关于 $y \in Y$ 一致地最终有界, $\alpha(x,y) \rightrightarrows 1$ 在 Y 上. 试证: 如果在集合 $X \times Y$ 中引进这样的基 $B = \{B_X \times Y\}$, 其元素是基 B_X 的元素 B_X 和集合 Y 的直积, 则上面所说的定义将分别与在基 B 下的等式

$$f(x,y) = o(g(x,y)), \quad f(x,y) = O(g(x,y)), \quad f(x,y) \sim g(x,y)$$

等价.

作业 2. 设 $p(x)$ 是区间 $c \le x \le d$ 上的光滑正函数, 而 $u(x,\lambda)$ 是方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\lambda) = \lambda^2 p(x) u(x,\lambda)$ 的解.

a) 如果在 $[c,d]$ 上 $p(x) \equiv 1$, 试求解 $u(x,\lambda)$.

b) 设 $0 < m \le p(x) \le M < +\infty$ 在 $[c,d]$ 上, 且 $u(c,\lambda) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\lambda) = 0$. 试给出 $u(x,\lambda)$ 在 $x \in [c,d]$ 的下方和上方的估计.

c) 设 $\ln u(x,\lambda) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)\lambda^{1-n}$ 当 $\lambda \to +\infty$, 这里 $c_0(x)$,$c_1(x)$,... 是光滑函数. 试利用 $\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2$, 证明 $c_0'^2(x) = p(x)$ 和 $\left(c_{n-1}'' + \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k' \cdot c_{n-k}'\right) = 0$.

作业 3. a) 对于 $\alpha = 0$, 函数 $h(x) = e^{-\lambda x^\alpha}$ 在 $x = 0$ 达到最大值. 同时, 若 $\delta = O(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}})$, 则 $h(x)$ 在点 $x = 0$ 的 $\delta-$ 邻域内是 1 阶量. 证明: 如果 $0 < \delta < 1$, 则积分

$$W(\lambda) = \int_{c(\lambda,\delta)}^{a} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx,$$

其中 $c(\lambda,\delta) = \lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时的阶为 $O(e^{-A\lambda^\delta})$. 这里 A 是一个正常数.

b) 证明: 如果函数 f 在 $x = 0$ 连续, 则

$$W(\lambda) = \alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[f(0) + o(1)]\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad \text{当}\lambda \to +\infty.$$

c) 定理 1, a) 中的条件 $f(x)=f(x_0)+O(x-x_0)$ 可以减弱, 用 f 在点 x_0 连续这个条件代替它. 试证: 这时渐进式主项不变, 但一般说, 等式 (2') 不再保持, 其中的 $O(x-x_0)$ 现在应换成 $o(1)$.

作业 4. a) 试证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1+O(n^{-1})) \qquad \text{当} n \to +\infty.$$

b) 用欧拉积分表示这个积分, 并证明当 $n \in N$ 时它等于 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

c) 试求瓦利斯公式 $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

d) 试求 a) 中积分当 $n \to +\infty$ 的渐近展开的头两项.

解答作业 1. 设在基 B_X 下的渐进关系

$$f(x,y)=o(g(x,y)),\quad f(x,y)=O(g(x,y)),\quad f(x,y)\sim g(x,y)$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的. 记 $|f(x,y)|=\alpha(x,y)|g(x,y)|$. 所以

$$\alpha(x,y)\rightrightarrows 0$$

在基 B_X 下, 对任意 $y\in Y$ 成立; $\alpha(x,y)$ 在基 B_X 下, 对任意 $y\in Y$ 一致最终有界;

$$\alpha(x,y)\rightrightarrows 1$$

在基 B_X 下, 对任意 $y\in Y$ 成立, 分别等价于, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $b_X\in B_X$, 使得对任意的 $x\in b_X$, 有

$$\begin{aligned}|\alpha(x,y)|<\epsilon,\qquad &\forall y\in Y;\\ |\alpha(x,y)|<M,\qquad &\forall y\in Y;\\ |\alpha(x,y)-1|<\epsilon,\quad &\forall y\in Y.\end{aligned}$$

所以对任意 $\epsilon>0$, 对任何 $(x,y)\in b_X\times Y\in B$, 有

$$\begin{aligned}&|\alpha(x,y)|<\epsilon;\\ &|\alpha(x,y)|<M;\\ &|\alpha(x,y)-1|<\epsilon.\end{aligned}$$

所以在基 B 下成立

$$\begin{aligned}\alpha(x,y)&\to 0;\\ \alpha(x,y)\ &\text{最终有界};\\ \alpha(x,y)&\to 1.\end{aligned}$$

因此得知, 在基 B 下成立渐近等式:

$$f(x,y)=o(g(x,y)),\quad f(x,y)=O(g(x,y)),\quad f(x,y)\sim g(x,y).$$

反之同理可证.

解答作业 2. a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\lambda)=\lambda^2 u(x,\lambda),\qquad u(x,\lambda)=e^{\lambda x}f(\lambda).$$

b)

$$\begin{aligned}u(x,\lambda)&\simeq u(c,\lambda)+\frac{\partial u}{\partial x}(c,\lambda)(x-c)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c,\lambda)(x-c)^2\quad x\to c^+;\\ u(x,\lambda)&\simeq 1+\frac{1}{2}\lambda^2 p(c)(x-c)^2\quad x\to c^+\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}\lambda^2 m(x-c)^2 \quad \leq \quad u(x,\lambda) \leq 1+\frac{1}{2}\lambda^2 M(x-c)^2 \quad x \to c^+,\, x\in[c,d].$$

c)

$$\ln u(x,\lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\lambda^{1-n},$$

而 $\{\lambda^{1-n}\}$ 关于 $\lambda\to+\infty$ 是渐近序列. 假设 $\frac{u_k}{u}$ 关于这个渐近序列有渐近展开 $\frac{u_k'}{u}\simeq\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\lambda^{1-n}$[1], 对任意 $x\in[c,d]$. 则

$$\int_c^{x_0}\frac{u_x'}{u}dx \simeq \int_c^{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\lambda^{1-n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_c^{x_0}a_n(x)dx\cdot\lambda^{1-n}.$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x_0)\lambda^{1-n}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n(c)\lambda^{1-n}\simeq \ln u(x_0,\lambda)-\ln u(c,\lambda)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\int_c^{x_0}a_n(x)dx\cdot\lambda^{1-n},\quad \lambda\to+\infty.$$

由渐近展开的唯一性可知

$$c_n(x_0)-c_n(c)=\int_c^{x_0}a_n(x),\qquad \forall n,\, x_0\in[c,d].$$

于是 $a_n(x)=c_n'(x)$, 即

$$\frac{u_x'}{u}\simeq\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(x)\lambda^{1-n},$$

易验证上式确实为 $\frac{u_x'}{u}$ 的渐近展开. 同理有

$$\left(\frac{u_x'}{u}\right)'\simeq\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{''}(x)\lambda^{1-n}.$$

于是

$$\frac{u_{xx}^{''}}{u}=\lambda^2p(x)=\left(\frac{u_x'}{u}\right)'+\left(\frac{u_x'}{u}\right)^2\simeq\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{''}(x)\lambda^{1-n}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(x)\lambda^{1-n}\right)^2,\quad \lambda\to+\infty,\,\forall x\in[c,d].$$

比较 λ^2 的系数和 λ^{2-n} 的系数, 得证.

解答作业 3. 略.

解答作业 4. 略.

[1] 请注意, 右端并不一定对 x 一致收敛, 所以更准确地, 需要分成有限项和小量考虑.