中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 14

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 12 月 23 日，19:00-20:40

作业 1. 设 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 分别是 f 和 g 的规范傅立叶变换. 证明

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

作业 2. 设 $f = f(x, y)$ 是二维拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 在半平面 $y \geq 0$ 上满足以下条件的解: $f(x, 0) = g(x)$, 而且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 当 $y \to +\infty$ 时有 $f(x, y) \to 0$.

a) 验证函数 f 关于变量 x 的傅立叶变换 $\hat{f}(\xi, y)$ 具有 $\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$ 的形式.

b) 试求函数 $e^{-y|\xi|}$ 关于变量 ξ 的傅立叶原像.

c) 现在, 试求函数 f 的泊松积分形式的表达式

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi.$$

作业 3. 用符号 $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 或更简短的符号 S, 表示对任意非负整数 α, β 都满足条件

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta f^{(\alpha)(x)}| < \infty$$

的一切函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 的集合. 这种函数叫做 (当 $x \to \infty$ 时的) 降速函数.

a) 验证函数 $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ 以及它的对 $x \neq 0$ 的一切导数, 在无穷远处的减小速度比变量 $|x|$ 的任意负指数幂都快. 尽管如此, 这个函数不属于函数类 S.

b) 试证, 这个函数的傅立叶变换在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微, 但不属于函数类 S (仍然是因为 $e^{-a|x|}$ 在 $x = 0$ 不可微).

作业 4. 试证:

a) 如果 f 在 $x \geq 0$ 是连续正单调函数, 则

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + O(f^{(n)}) + O(1), \quad 当\, n \to \infty;$$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + c + o(1), \quad 当\, n \to \infty.$

c) $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \approx \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$, 当 $n \to \infty$ 和 $\alpha > -1$.

作业 5. 用分部积分法求下列函数当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开:

a) $\Gamma_s(x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ – 不完全 Γ 函数;

b) $\mathrm{er}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt$ – 概率误差函数 ($\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ – 欧拉 -泊松积分)

c) $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha}} dt$, 如果 $\alpha > 0$.

作业 6. 利用上一题的结果, 求下列函数当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开:

a) $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – 积分正弦 ($\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ – 狄利克雷积分);

b) $\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt$, $\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt$ – 菲涅尔积分 ($\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$).

解答作业 1. 首先

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dxd\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{-i\xi x}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

用 $\bar{\hat{g}}$ 代替 $g(x)$, 有

$$\begin{aligned}\langle \hat{f},\hat{g}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\hat{\bar{\hat{g}}}(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\bar{g}(\xi)d\xi = \langle f,g\rangle.\end{aligned}$$

解答作业 2. (a)

$$\hat{f}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i\xi x}dx,\quad \frac{\partial\hat{f}(\xi,y)}{\partial^2 y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}e^{-i\xi x}dx,$$

又

$$\begin{aligned}& f^{\hat{(2)}}(\xi) = (i\xi)^2\hat{f}(\xi) \Rightarrow -|\xi|^2\hat{f}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}e^{-i\xi x}dx \\ & \Rightarrow \frac{\partial\hat{f}(\xi,y)}{\partial y^2} + |\xi|^2\hat{f}^2(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta f e^{-i\xi x}d\xi = 0.\end{aligned}$$

解这个常微分方程可得:

$$\hat{f}(\xi,y) = \mu(\xi)e^{-y|\xi|^2},$$

$y=0$ 时, $\hat{f}(\xi,0)=\hat{g}(\xi)$, 证毕.

(b)

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\xi|}e^{ix\xi}d\xi = \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-y)\xi}d\xi + \int_{-\infty}^{0} e^{(ix+y)\xi}d\xi \\ =\ & \frac{1}{ix-y}e^{(ix-y)\xi}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{ix+y}e^{(ix+y)\xi}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{-1}{ix-y}+\frac{1}{ix+y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}&\widetilde{e^{-y|x|}} * \tilde{\hat{g}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2y}{(x-\xi)^2+y^2}g(\xi)d\xi = 2\pi(\widetilde{e^{-y|x|}\cdot\hat{g}}) = 2\pi\tilde{\hat{f}}(x,y) = 2\pi f(x,y) \\ \Rightarrow\quad & f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

解答作业 3. (a)

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases}(-ax)^n e^{-ax} & \text{如果} x>0 \\ (ax)^n e^{ax} & \text{如果} x<0\end{cases}\quad (n\geq 1)$$

对任何 $m, n \in \mathbb{N}$, $a > 0$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{(-a|x|)^{n+1}e^{-a|x|}}{-m|x|^{-(m+1)}} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{|x|^{m+n+2}}{e^{a|x|}} \cdot \frac{(-a)^{n+1}}{-m} = 0.$$

显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可微, $S \subset C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, 因此 $f \notin S$.

(b)

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-itx}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+it)x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{(a-it)x}dx \\ &= \frac{-1}{a+it}e^{-(a+it)x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{a-it}e^{(a-it)x}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a+it} + \frac{1}{a-it} = \frac{2a}{a^2+t^2}.\end{aligned}$$

因此 $\hat{f}(t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, 但对任何 $M > 0$, 取 $t > \max\{\frac{\mu}{a}, a\}$, 有

$$\left|t^3 \cdot \frac{2a}{a^2+t^2}\right| = 2a\left|\frac{t}{1+\frac{a^2}{t^2}}\right| > 2a \cdot \frac{\frac{M}{a}}{2} = M.$$

因此 $\hat{f}(t) \notin S$.

解答作业 4. (a) f 在 $x \geq 0$ 单调不减时,

$$\begin{aligned}&\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \\ &0 \leq \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &f(n) - f(1) \leq \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(x)dx \leq f(n+1) - f(0) \Rightarrow \sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x)dx + O(f(n)) + O(1), \quad n \to +\infty.\end{aligned}$$

f 在 $x \geq 0$ 上单调不增时,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^n f(x)dx.$$

(b) 令 (a) 中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n f(x)dx + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(1) \quad n \to +\infty.$$

而 $O(\frac{1}{n}) = o(1)$, $\ln n + c + o(1) = O(1)$. 证毕.

(c) $\alpha > -1$, $f(x) = x^\alpha(\ln x)^\beta$, 对任何 β, x 足够大时, $f(x)$ 单调增且趋于 $+\infty$. 存在足够大的 M,

$$\sum_{k=M}^n k^\alpha(\ln k)^\beta = \int_M^n f(x)dx = O(n^2(\ln n)^\beta) + O(1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}(\ln x)^{\beta}\bigg|_M^n - \frac{\beta}{\alpha+1}\int_M^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1}dx + O(n^2(\ln n)^{\beta}) + O(1) \\
&= \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta} - \frac{1}{\alpha+1}M^{\alpha+1}(\ln M)^{\beta} - \frac{\beta}{\alpha+1}\int_M^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1}dx + O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) + O(1).
\end{aligned}
$$

由 $\int_M^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1}dx = o(n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta})$, $n^{\alpha}(\ln n)^{\beta} = o(n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta})$, $n \to +\infty$. 且 $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta}$, $M^{\alpha+1}(\ln M)^{\beta}$ 是定值. 则 $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \approx \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$, $n \to +\infty$.

解答作业 5. (a)

$$
\begin{aligned}
T_s(x) &= \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = -\,t^{s-1}e^{-t}\Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t}(s-1)t^{s-2}dt \\
&= x^{s-1}e^{-x} + (s-1)\int_x^{+\infty} t^{s-2}e^{-t}dt = \sum_{k=1}^{n} x^{s-k}e^{-x} + (s-1)(s-2)\cdots(s-n)\int_x^{+\infty} t^{s-n-1}e^{-t}dt
\end{aligned}
$$

$s \in N$ 时, $\Gamma_s(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} x^{s-k}e^{-x}$.

$s \notin N$ 时, $x^{s-k-1}e^{-x} = o(x^{s-k}e^{-x})$, $x \to +\infty$. 于是 $\Gamma_s(x) \simeq \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{s-k}e^{-x}$ $(x \to +\infty)$.

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{er}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt, \quad x > 0. \\
\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt &= \frac{-1}{2t}e^{-t^2}\bigg|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\cdot\frac{1}{2t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{e^{-t^2}}{4t^3}\bigg|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\cdot\frac{3}{4}t^{-4}dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3e^{-t^2}}{8t^5}\bigg|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{15}{8}e^{-t^2}\cdot t^{-6}dt \\
&= \cdots \\
&= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{2^n x^{2n-1}}\right) + \int_x^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n}e^{-t^2}t^{-2n}dt. \\
\mathrm{er}f(x) &\simeq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{2^k x^{2k-1}}, \qquad x \to +\infty.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}dt = \int_x^{+\infty}\frac{-ide^{it}}{t^{\alpha}} = -i\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}\bigg|_x^{+\infty} - i\alpha\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}dt \\
&= i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} - \alpha\int_x^{+\infty}\frac{de^{it}}{t^{\alpha+1}}dt = i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} - \alpha\,\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\bigg|_x^{+\infty} - \alpha(\alpha+1)\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+2}}dt \\
&= i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} + \alpha\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha+1)i\int_x^{+\infty}\frac{de^{it}}{t^{\alpha+2}} = i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} + \alpha\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+2}} \\
&\quad + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)i\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+3}}dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &\simeq e^{ix}\left(\frac{i}{x^{\alpha}}+\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}+\frac{-\alpha(\alpha+1)i}{x^{\alpha+2}}+\frac{-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{x^{\alpha+3}}+\cdots\right)\\
&= e^{ix}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\phi(\alpha+4k)}{x^{\alpha+4k}}+\frac{\phi(\alpha+4k+1)}{x^{\alpha+4k+1}}+\frac{-i\phi(\alpha+4k+2)}{x^{\alpha+4k+2}}+\frac{-\phi(\alpha+4k+3)}{x^{\alpha+4k+3}}\right), \qquad x\to+\infty,
\end{aligned}
$$

其中 $\phi(\alpha+m)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$, $m\in\mathbb{N}$, $\phi(\alpha)=1$.

解答作业 6. (a) 上题 (c) 中令 $\alpha=1$ 得

$$
\begin{aligned}
F(x) &\simeq e^{ix}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i(4k)!}{x^{4k+1}}+\frac{(4k+1)!}{x^{4k+2}}+\frac{-i(4k+2)!}{x^{4k+3}}+\frac{-(4k+3)!}{x^{4k+4}}\right);\\
F(x) &= \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt+i\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\\
\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt &\simeq \cos x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k)!}{x^{4k+1}}-\frac{(4k+2)!}{x^{4k+3}}\right)+\sin x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k+1)!}{x^{4k+2}}-\frac{(4k+3)!}{x^{4k+4}}\right),\ x\to+\infty;\\
\mathrm{Si} &= \int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\cos\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k)!}{x^{4k+1}}-\frac{(4k+2)!}{x^{4k+3}}\right)-\sin x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k+1)!}{x^{4k+2}}-\frac{(4k+3)!}{x^{4k+4}}\right),\ x\to+\infty.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\cos t\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{+\infty}\cos t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot 2tdt=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_0^{+\infty}\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\
&\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos\frac{pi}{2}t^2dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}t\right)^2d\sqrt{\frac{\pi}{2}}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}\cos t^2dt\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}x^2}\cos t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}x^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\\
&\mathrm{S}(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.
\end{aligned}
$$

令上题 (c) 中 $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt=\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt+i\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt;\\
\mathrm{C}(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}-\mathrm{Re}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}F\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\\
&\simeq \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(8k+1)!!}{(\pi x^2)^{4k+1}x}-\frac{(8k+5)!!}{(\pi x^2)^{4k+3}x}\right)+\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(8k-1)!!}{(\pi x^2)^{4k}x}-\frac{(8k+3)!!}{(\pi x^2)^{4k+2}x}\right);\\
\mathrm{S}(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}-\mathrm{Im}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}F\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\\
&\simeq \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{(8k-1)!!}{(\pi x^2)^{4k}x}-\frac{(8k+3)!!}{(\pi x^2)^{4k+2}x}\right)-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi}{2}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(8k+1)!!}{(\pi x^2)^{4k+1}x}-\frac{(8k+5)!!}{(\pi x^2)^{4k+3}x}\right).
\end{aligned}
$$

注意 $(-1)!!=1$.