# 中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 13

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 12 月 16 日，19:00-20:40

**作业** 1. 证明: 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$\cos(x) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right).$$

**作业** 2. 试证下述断言:

a) 如果函数 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上直接可积, 则

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right|dx.$$

b) 如果函数 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ 和 $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上直接可积, 且 $g$ 的模在 $\mathbb{R}$ 上有界, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t)e^{i\lambda t}dt =: \phi_\lambda(x) \rightrightarrows 0, \qquad \text{在}\,\mathbb{R}\,\text{上}, \lambda\to\infty.$$

c) 如果 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ 是 $2\pi-$ 周期且在一个周期上绝对可积的函数, 则它的傅立叶三角级数的余项 $S_n(x)-f(x)$ 可以表示成

$$S_n(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\Delta^2 f)(x,t)D_n(t)dt,$$

这里 $D_n$ 是 $n$ 阶狄利克雷核, 而 $(\Delta^2 f)(x,t) = f(x+t)-2f(x)+f(x-t)$.

d) 对于任意 $\delta\in(0,\pi)$, 可把上面得到的余项公式化成以下形式

$$S_n(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}(\Delta^2 f)(x,t)dt + o(1),$$

这里 $o(1)$ 当 $n\to\infty$ 时趋于零, 而且这个极限在任何使函数 $f$ 有界的区间 $[a,b]$ 上一致的.

e) 如果函数 $f:[-\pi,\pi]\mapsto\mathbb{C}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足赫尔德条件

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le M|x_1-x_2|^\alpha,$$

这里 $M$ 和 $\alpha$ 是正数, 此外, $f(-\pi)=f(\pi)$, 则函数 $f$ 的傅立叶级数在整个区间上一致收敛于它自己.

**作业** 3. a) 试证: 如果 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是 $2\pi-$ 周期函数, 且有分段光滑的 $m$ 阶 ($m \in \mathbb{N}$) 导数 $f^{(m)}$, 则 $f$ 可以表示成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_m(t-x) f^{(m)}(t)dt$$

的形式, 这里 $B_m(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(ku + \frac{m\pi}{2}\right)}{k^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

b) 利用函数 $\frac{\pi - x}{2}$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的傅立叶展开, 证明: $B_1(u)$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的 1 次多项式, 而 $B_m(u)$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的 $m$ 次多项式. 这些多项式叫伯努利多项式.

c) 试验证: 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 有 $\int_0^{2\pi} B_m(u)du = 0$.

**作业** 4. 设周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为 $a_k(k = 0, 1, 2, ...)$ 和 $b_k(k = 1, 2, ...)$. 对于 $h \in \mathbb{R}$, 请计算函数 $g(x) = f(x + h)$ 的傅立叶系数.

**作业** 5. 设函数 $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ 连续且分段可微, 又设它的导数 $f'$ 在区间 $(a, b)$ 上平方可积. 试利用帕塞瓦尔等式证明:

a) 如果 $[a, b] = [0, \pi]$, 则当满足两个条件 $f(0) = f(\pi) = 0$ 或 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 中的任何一个时, 成立斯捷克洛夫不等式:

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx \le \int_0^{\pi} (f')^2(x)dx,$$

其中的等号仅在 $f(x) = a\cos x$ 时成立;

b) 如果 $[a, b] = [-\pi, \pi]$ 并同时满足两个条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, 则成立维勒金盖勒不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \le \int_{-\pi}^{\pi} (f')^2(x)dx,$$

其中的等号仅在 $f(x) = a\cos x + b\sin x$ 时成立.

**作业** 6. 设 $f$ 是 $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ 中的函数. 如果一个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)]$$

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上平均收敛于 $f$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - T_n(x)|^2 dx = 0.$$

请问, 该级数是否一定是 $f$ 的傅立叶级数.

**解答作业** 1. 方法一: 仿照例 20.3.9, 分析 $f(x)=\sin(\alpha x)$.

方法二: 根据例 20.3.9 的结果,

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

及 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 推得.

(a)

**解答作业** 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)}dx$$

于是,

$$\begin{aligned}\left|f(x)e^{i\lambda x}dx\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}+f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)}dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)e^{i\lambda x}dx\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right||e^{i\lambda x}|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|dx.\end{aligned}$$

(b) 设 $|g(x)|<M$ $(x\in\mathbb{R})$, 则

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t)e^{i\lambda t}dt\right| \leq \frac{M}{|e^{i\lambda x}|}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{i\lambda(x+t)}dt\right| = M\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \to 0, \qquad (\lambda\to+\infty).$$

即 $\phi \rightrightarrows 0$.

(c)

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t)+f(x+t)]D_n(t)dt, \\ \int_0^{\pi} D_n(t)dt &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt = 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt = \pi, \\ S_n(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t)+f(x+t)-2f(x)]D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\Delta^2 f)(x,t)D_n(t)dt.\end{aligned}$$

(d) 对任何 $\delta\in(0,\pi)$,

$$g(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$$

在 $(\delta,\pi)$ 上绝对可积,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\sin nt g(t)dt = o(1).$$

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}[f(x-t)+f(x+t)]D_n(t)dt + o(1) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}[f(x-t)+f(x+t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin nt}\cdot\frac{\sin t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{\sin nt}{\sin t}dt + o(1).\end{aligned}$$

当 $\delta\to 0$, $n\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{t}[f(x+t)+f(x-t)]dt,\\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{t}dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt+\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{1}{2}D_n(t)dt+o(1)=\frac{\pi}{2}+o(1)\qquad o(1)\to 0,\ \delta\to 0\text{时}. \end{aligned}$$

于是

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}[f(x-t)-2f(x)+f(x+t)]dt+o(1).$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 不妨设 $|f(x)|\le M,\quad \forall x\in[a,b]$.

$$\begin{aligned} |o(1)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\Delta^2 f)(x,t)\left(\frac{1}{2}D_n(t)-\frac{\sin nt}{t}\right)dt\right|\\ &\le \frac{4M}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}D_n(t)-\frac{\sin nt}{t}\right|dt\to 0,\qquad \text{当 } n\to+\infty. \end{aligned}$$

即 $o(1)$ 一致收敛于 0.

(e)

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{(\Delta^2 f)(x,t)}{t}\right|dt\le\int_0^{\pi}\frac{2Mt^{\alpha}}{t}dt=2M\int_0^{\pi}t^{\alpha-1}dt.$$

当 $\alpha>0$ 时, $\frac{(\Delta^2 f)(x,t)}{t}$ 在 $(0,\pi)$ 内绝对可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin nt\cdot\frac{(\Delta^2 f)(x,t)}{t}dt=0.$$

又 $o(1)$ 一致收敛于 0, 由 $d$, $f(x)$ 的傅立叶级数一致收敛于 $f(x)$.

**解答作业** 3. 略.

**解答作业** 4.

$$\begin{aligned} (1)\qquad f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\ f(x+h) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k(x+h)+b_k\sin k(x+h))\\ (2)\qquad &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k\cos kh+b_k\sin kh)\cos kx+(-a_k\sin kh+b_k\cos kh)\sin kx\right) \end{aligned}$$

$g(x)=f(x+h)$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数, 由其傅立叶级数的唯一性可知, (2)是 $g(x)$ 的傅立叶级数.

**解答作业** 5. (a) 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi];\\ -f(-x), & x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 且分段可微. 如果 $f'(x)$ 存在, 则 $\tilde{f}'(x)=-\tilde{f}'(-x)$. 我们有 $\tilde{f}(x)$, $\tilde{f}'(x)\in$

$\mathcal{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. 令

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx);\\ \tilde{f}'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k\sin kx+kb_k\cos kx).\end{aligned}$$

所以 (1) $f(0)=f(\pi)=0$, 则

$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k=0=\tilde{f}(\pi)=\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k=0.$$

于是 $a_0=0$ (2) $\int_0^\pi f(x)dx=0$, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)dx=0$. 综上, 我们有

$$\frac{1}{\pi}||\tilde{f}(x)||^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}^2(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2+k^2b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\tilde{f}(x))^2dx.$$

于是

$$\int_0^\pi f^2(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}^2(x)dx\le\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\tilde{f}'(x))^2dx=\int_0^\pi(f'(x))^2dx.$$

等号成立时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2+k^2b_k^2),$$

则 $a_k=b_k=0$, 对任意 $k\ge 2$. 设 $f(x)=a\cos x+b\sin x$, 若 $f(0)=f(\pi)=0$, $f(x)\equiv 0=0\cdot\cos x$. 若 $\int_0^\pi f(x)dx=0$, 则 $b=0$, $f(x)=a\cos x$. 证毕.

(b) 设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, 同上分析, 可证.

**解答作业** 6. 不一定, 令

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & -\pi\le x<0;\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

显然 $f(x)\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right]^2dx=0.$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right]^2dx=\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi-x}{2}\right)^2dx>0.$$

也即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上不平均收敛于 $f(x)$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ 不是 $f(x)$ 的傅立叶级数.