中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 11

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 12 月 2 日，19:00-20:40

作业 1. 设平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^\top$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)^\top$ 的线段交于点 M, 证明:

$$(M_1,M_2,M)=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

作业 2. 在空间仿射坐标系中, 直线 l_1 与 l_2 分别有一般方程如下:

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ x-y+2z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-z+1=0, \\ y+2z-2=0, \end{cases}$$

(1) 写出经过 l_1, 且平行于 l_2 的平面的方程;

(2) 求与 l_1, l_2 都共面, 并且平行于向量 $\boldsymbol{\omega}(1,2,1)$ 的直线的方程.

作业 3. 证明: 任何与异面直线

$$l_1: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

和

$$l_2: \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0; \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0, \end{cases}$$

都相交的直线 l 的方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu_1(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0; \\ \lambda_2(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\mu_2(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0, \end{cases}$$

其中 λ_1 与 μ_1 不同时为零, λ_2 与 μ_2 不同是为零.

作业 4. 设两条异面直线 l_1, l_2 分别经过点 M_1, M_2, 方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, 请证明 l_1 与 l_2 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

作业 5. a) 设 $C[a,b]$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数所构成的线性空间, 其中定义了在该区间上函数的一致收敛性度量, 而 $C_2[a,b]$ 还是这个线性空间, 但其中定义了在该区间上函数的均方差

度量 (即 $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b |f-g|^2(x)dx}$). 试证: 函数在 $C[a,b]$ 中的收敛性蕴含它们在 $C_2[a,b]$ 中的收敛性, 但逆命题不成立, 而且空间 $C_2[a,b]$ 不完备, 这与 $C[a,b]$ 不同.

d) 求出 $\sin \pi x$ 在区间 $[-1,1]$ 按勒让德多项式的傅立叶展开的前四项.

e) 试证: 第 n 个勒让德多项式在 $C_2[-1,1]$ 中的范数 $||P_n||$ 的平方等于

$$\frac{2}{2n+1}\left(=(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdot 2n}{n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\right).$$

f) 试证: 在一切最高次项的系数等于 1 的 n 次多项式中, 勒让德多项式 $\bar{P}_n(x)$, 按区间 $[-1,1]$ 上的平均意义, 偏离零最小.

g) 说明为什么任意函数 $f\in C_2([-1,1],\mathbb{C})$ 都满足等式

$$\int_{-1}^{1}|f|^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx\right|^2,$$

这里 $\{P_0,P_1,...\}$ 是勒让德多项式.

作业 6. 给定函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & \text{当} x\in[0,\pi] \\ -1 & \text{当} x\in[-\pi,0) \end{cases}$$

属于 $\mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, 请给出 $f(x)$ 关于正交系 $\{1,\cos(nx),\sin(nx),n\in\mathbb{N}\}$ 的傅立叶级数.

解答作业 1. 设 $\lambda = (M_1, M_2, M)$, 则 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

代入平面方程即得.

解答作业 2. (1) 假设所求平面为 $Ax+By+Cz=D$, 与 l_1 平行得

$$-A+5B+3C=0; \tag{1}$$

与 l_2 平行得

$$A-6B+3C=0. \tag{2}$$

联立(1)和(2)得到 $A=33C$, $B=6C$.

$$33x+6y+z=D,$$

由于该平面过 l_1, 取 l_1 上任一点 $(0,-2,-1)$, 由于平面过该点, 解得 $D=-13$. 于是, 平面方程为

$$33x+6y+z=-31.$$

(2) 将 l_1, l_2 表示成参数方程:

$$l_1: \qquad (t, -5t-2, -3t-1),$$

$$l_2: \qquad (s-1, -6s+6, 3s).$$

假设所求直线与 l_1 交于 $(t_0, -5t_0-2, -3t_0-1)$, 和 l_2 交于 $(s_0-1, -6s_0+6, 3s_0)$, 由其与 $(1,2,1)$ 平行得

$$\begin{cases} 2t_0+s_0=-1; \\ -7t_0+8s_0=10, \end{cases}$$

于是 $t_0=-18/23$, $s_0=13/23$. 因此所求直线过 $(-18/23, 44/23, 31/23)$, 参数方程为 $(-18/23+t, 44/23+2t, 31/23+t)$.

解答作业 3. 有轴平面束.

解答作业 4. 略.

解答作业 5. (a) 设函数 $\{f_n(x)\}$ 在 $C[a,b]$ 中收敛到 $g(x)$, 即对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-g(x)| < \epsilon.$$

于是

$$d(f_n, g) = \sqrt{\int_a^b |f_n-g|^2(x)dx} \le \epsilon\sqrt{b-a},$$

也即 $\{f_n(x)\}$ 在 $C_2[a,b]$ 中也收敛到 $g(x)$. 反之, 在 $[0,1]$ 上取 $f_n(x) := x^n - x^{2n}$. 易验证 $\{f_n(x)\}$ 在 $C_2[a,b]$ 上收敛到 $g(x)=0$. 而在 $C[a,b]$ 中, 对每一点 $x\in[0,1]$, $f_n(x)$ 也收敛于 $g(x)$, 但是对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 x_n 使得 $x_n^n=\frac{1}{2}$, 进而 $f_n(x_n)=\frac{1}{4}$, 因此 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛.

考虑 $\{x^n\}\in C_2[0,1]$, 它是柯西列, 但收敛到 $g(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1;\\ 1 & x=1,\end{cases}$, 而 $g(x)$ 显然不连续因而不属于 $C_2[0,1]$, 故 $C_2[a,b]$ 不完备.

(d) 勒让德多项式前四项为 $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ 于是

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\int_{-1}^1 \sin\pi x dx}{\int_{-1}^1 P_0^2(x)dx}=0;\\
a_1 &= \frac{\int_{-1}^1 \sin\pi x\cdot x dx}{\int_{-1}^1 P_1^2(x)dx}=\frac{3}{\pi};\\
a_2 &= \frac{\int_{-1}^1 \sin\pi x\cdot \frac{1}{2}(3x^2-1) dx}{\int_{-1}^1 P_2^2(x)dx}=0;\\
a_3 &= \frac{\int_{-1}^1 \sin\pi x\cdot \frac{1}{2}(5x^3-3x) dx}{\int_{-1}^1 P_3^2(x)dx}=\frac{7(\pi^2-15)}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
||P_n(x)||^2 &= \frac{1}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^1\left[\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]^2dx=\frac{1}{(2^n n!)^2}\left(\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\Big|_{x=-1}^{x=1}\right.\\
&\quad\left.-\int_{-1}^1\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}dx\right)\\
&= ...=\frac{1}{2^n n!}(-1)^n\int_{-1}^1(x^2-1)^n\cdot\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}dx=(-1)^n\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!}\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx = x(x^2-1)^n\big|_{x=-1}^{x=1}-\int_{-1}^1 2nx^2(x^2-1)^{n-1}dx=-2n\left(\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx+\int_{-1}^1(x^2-1)^{n-1}dx\right),$$

因此 $\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx=-\frac{2n}{1+2n}\int_{-1}^1(x^2-1)^{n-1}dx=\cdots=(-1)^n\frac{2^n n!}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{2}{2n+1}$. 综上 $||P_n(x)||^2=\frac{2}{2n+1}$.

(f) 设最高次项系数是 1 的 n 次多项式 $f=\bar{P}_n(x)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\bar{P}_k(x)$, 其中 $\bar{P}_k(x)$ 的首次项系数均为 1. 则

$$||f||^2=\int_{-1}^1\left[\bar{P}_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\bar{P}_k(x)\right]^2dx=\int_{-1}^1\left(\bar{P}_n^2(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k^2\bar{P}_k^2(x)\right)dx\ge||\bar{P}_n(x)||.$$

(g) 由 (e) 知, $P_n^*(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ 是规范正交多项式, 于是

$$\langle f,f\rangle=\sum_{n=1}^\infty|\langle f,P_n^*(x)\rangle|^2.$$

证毕.

解答作业 6. $f(x)$ 的傅立叶级数为 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, 其中

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0; \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0; \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{2(1-\cos(n\pi))}{nx} = \begin{cases} 0 & n\text{是偶数;} \\ \frac{4}{n\pi} & n\text{是奇数.} \end{cases}
\end{aligned}
$$