中国科学院大学 2015 秋季学期微积分 III-A01 习题 10

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 11 月 25 日，19:00-20:40

作业 1. 设 A, B, C 是不在一直线上的三点, 证明: 点 M 在 A, B, C 决定的平面上的充分必要条件是, 存在实数 λ, μ, ν, 使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}, \qquad \text{且} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

其中 O 是任意取定的一点.

作业 2. 证明: 点 M 在 $\triangle ABC$ 内 (包括三条边) 的充分必要条件是, 存在非负的实数 λ, μ, ν, 使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}, \qquad \text{且} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

其中 O 是任意取定的一点.

作业 3. 在一个空间仿射坐标系中, 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的坐标依次为 $(x_1, y_1, z_1)^\top$, $(x_2, y_2, z_2)^\top$, $(x_3, y_3, z_3)^\top$, 证明: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

作业 4. 在一个空间仿射坐标系中, 点 A, B, C 的坐标依次为 $(x_1, y_1, z_1)^\top$, $(x_2, y_2, z_2)^\top$, $(x_3, y_3, z_3)^\top$, 证明: 若 A, B, C 共线, 则

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

并请举例说明反之不一定成立.

作业 5. 证明: 三角形的三条角平分线相交于一点.

作业 6. 证明: 如果一个四面体有两对对棱互相垂直, 则第三对对棱也互相垂直, 并且三对对棱的长度的平方和相等.

作业 7. 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 并且构成右手系, 且

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle = \frac{\pi}{3}.$$

求 $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$.

解答作业 1. 因为 A,B,C 不共线, 因此 O 在 A,B,C 决定的平面上, 等价于存在唯一一组 μ,ν 使得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA} &= \mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\nu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\ \overrightarrow{OM} &= (1-\mu-\nu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

令 $\lambda=1-\mu-\nu$ 证毕.

解答作业 2. 延长 AM 交 BC 与 M', 通过 M' 在 BC 上, 可以证明满足

$$\overrightarrow{AM'}=\mu'\overrightarrow{AB}+\nu'\overrightarrow{AC}$$

的 μ',ν' 满足 $\mu'\geq 0$, $\nu'\geq 0$, 进而 $\mu\geq 0$, $\nu\geq 0$, 及 $\mu+\nu\leq 1$. 证毕.

解答作业 3.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0$$

等价于存在 $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ 使得

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0,$$

等价于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

解答作业 4. 上题推论, 反例即 OA, OB, OC 共面但 A,B,C 不共线.

解答作业 5. 由正弦定理, 或外积的几何意义得角平分线定理, 由 Ceva 定理证出结论.

解答作业 6. 设过同一点的三条棱分别为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 于是有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0$, 两式相减, 即得 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$.

只需证一组对棱平方和相等即可,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}).$$

证毕.

解答作业 7. 不妨设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 都是单位向量, 设直角标价 $[O;\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$. 于是 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(1,0,0)zz$, $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)^\top$, $\boldsymbol{c}$ 的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^\top$. 于是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此 $\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.