中国科学院大学 2015 春季学期微积分 II-A01 习题 16

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 7 月 4 日，8:00-9:40

作业 1 (P254-2). 根据斯托克斯公式

$$\int_S d\sigma \cdot (\nabla \times A) = \int_{\partial S} ds \cdot A,$$

证明

$$\begin{aligned}\int_S (d\sigma \times \nabla) \times B &= \int_{\partial S} ds \times B, \\ \int_S d\sigma \times \nabla f &= \int_{\partial S} ds\, f.\end{aligned}$$

作业 2 (P254-8). 多维柯西中值定理. 经典的积分中值定理 (“拉格朗日定理”) 断言, 如果函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 在可测连通紧集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上连续, 则存在点 $\xi \in D$ 使

$$\int_D f(x)dx = f(\xi) \cdot |D|,$$

其中 $|D|$ 是 D 的测度 (体积).

a) 现设 $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, 亦即, f 和 g 是在 D 中定义的连续实值函数. 试证成立以下 “柯西定理”: 存在点 $\xi \in D$ 使

$$g(\xi) \int_D f(x)dx = f(\xi) \int_D g(x)dx.$$

b) 设 D 是具有光滑边界 ∂D 的紧区域, 而 f, g 是 D 中的两个光滑向量场. 试证: 存在点 $\xi \in D$ 使

$$\mathrm{div} g(\xi) \cdot \underset{\partial D}{\mathrm{Flux}}\, f = \mathrm{div} f(\xi) \cdot \underset{\partial D}{\mathrm{Flux}}\, g,$$

其中 $\underset{\partial D}{\mathrm{Flux}}$ 是向量场通过曲面 ∂D 的流量.

作业 3 (265-1). 试证任何中心场 $A = f(r)r$ 是势场.

作业 4 (265-2). 设 $F = -\mathrm{grad} U$ 是有势力场. 试证在这种场内, 质点的稳定平衡位置在这个场的势 U 的极小点处.

解答作业 1. 1) 首先

$$
\begin{aligned}
ds \times B &= e^1((ds)^2B^3 - (ds)^3B^2) + e^2((ds)^3B^1 - (ds)^1B^3) + e^3((ds)^1B^2 - (ds)^2B^1); \quad (1)\\
(d\sigma \times \nabla) \times B &= e^1\left((d\sigma)^3\frac{\partial B^3}{\partial x^1} - (d\sigma)^1\frac{\partial B^3}{\partial x^3} - (d\sigma)^1\frac{\partial B^2}{\partial x^2} + (d\sigma)^2\frac{\partial B^2}{\partial x^1}\right)\\
&\quad + e^2\left((d\sigma)^1\frac{\partial B^1}{\partial x^2} - (d\sigma)^2\frac{\partial B^1}{\partial x^1} - (d\sigma)^2\frac{\partial B^3}{\partial x^3} + (d\sigma)^3\frac{\partial B^3}{\partial x^2}\right)\\
&\quad + e^3\left((d\sigma)^2\frac{\partial B^2}{\partial x^3} - (d\sigma)^3\frac{\partial B^2}{\partial x^2} - (d\sigma)^3\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + (d\sigma)^1\frac{\partial B^1}{\partial x^3}\right). \quad (2)
\end{aligned}
$$

分别取 $A = (0, B^3, -B^2)$, $A = (-B^3, 0, B^1)$ 以及 $A = (B^2, -B^3, 0)$ 代入斯托克斯公式, 看作是对分量 e^1, e^2, e^3 的积分, 再将得到的三个式子相加即得(1)=(2).

2)

$$
\begin{aligned}
ds \cdot f &= (ds)^1fe^1 + (ds)^2fe^2 + (ds)^3fe^3; \quad (3)\\
d\sigma \times \nabla f &= e^1\left((d\sigma)^2\frac{\partial f}{\partial x^3} - (d\sigma)^3\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + e^2\left((d\sigma)^3\frac{\partial f}{\partial x^1} - (d\sigma)^1\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\\
&\quad + e^3\left((d\sigma)^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - (d\sigma)^2\frac{\partial f}{\partial x^1}\right). \quad (4)
\end{aligned}
$$

分别取 $A = (f, 0, 0)$, $A = (0, f, 0)$ 以及 $A = (0, 0, f)$ 代入斯托克斯公式并求和, 即得(3)=(4).

解答作业 2. a) 首先, 当 $\int_D f(x)dx = 0$ 时, f 在 D 上连续, 故存在 ξ, 使得 $f(\xi) = 0$. 当 $\int_D g(x)dx = 0$ 时, 同理. 下面假设 $\int_D f(x)dx \cdot \int_D g(x)dx \neq 0$. 令

$$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0, \quad f(x) \neq 0\},$$

则有

$$\min \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{\int_D g(x)dx}{\int_D f(x)dx} \leq \max \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad \forall x \in D'.$$

证毕.

b) 首先,

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Flux}_{\partial D} f &= \int_{\partial D} f^1dx^2 \wedge dx^3 + f^2dx^3 \wedge dx^1 + f^3dx^1 \wedge dx^2\\
&= \int_D \left(\frac{\partial f^1}{x^1} + \frac{\partial f^2}{x^2} + \frac{\partial f^3}{x^3}\right)dx^1dx^2dx^3\\
&= \int_D \mathrm{div} f(x)dx.
\end{aligned}
$$

令 $f^*(x) := \mathrm{div} f(x)$, $g^*(x) := \mathrm{div} g(x)$, 使用 a) 中结论, 即得证.

解答作业 3. 任取闭路 $\gamma \subset D$, 记 γ 围成的区域是 S. 于是

$$\oint_\gamma A \cdot ds \quad = \quad \oint_r f(r)x^1dx^1 + \cdots + f(r)x^ndx^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial S} P^1 dx^1 + \cdots + P^n dx^n, \qquad \text{这里} P^i = f(r)x^i = f(\sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2})x^i \\
&= \iint_S \sum_{1\le i,j\le n} \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^i} - \frac{\partial P^i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{1\le i,j\le n} \iint_S (f'(r)2x^i x^j - f'(r)2x^j x^i) dx^i \wedge dx^j = 0.
\end{aligned}
$$

因此 $A = f(r)r$ 是势场.

解答作业 4. x 为平衡位置, 则 $F(x) = -\mathrm{grad}U(x) = 0$, 也即 x 为 U 的极值点. 另一方面, 在 x 的邻域内有一点 x', 我们知道 $F(x')$ 方向从 x' 指向 x, 也即 $-\mathrm{grad}U(x')$ 的方向为 x' 到 x, 根据泰勒展开, 我们易知 $U(x) < U(x')$. 也即 x 是 U 的极小值点.