中国科学院大学 2015 春季学期微积分 II-A01 习题 12

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 5 月 30 日，8:00-9:40

作业 1. 对于每个由条件

$$
\begin{aligned}
E_\alpha &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=\alpha\},\\
E_\alpha &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2=\alpha\},\\
E_\alpha &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=\alpha\},\\
E_\alpha &= \{z\in\mathbb{C} \mid |z^2-1|=\alpha\}
\end{aligned}
$$

确定的依赖参数 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的集合 E_α, 说明

a) E_α 是不是曲面;

b) 如果是, E_α 是多少维曲面;

c) E_α 是不是连通曲面.

作业 2. 设 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ 是满足条件 $f\circ f=f$ 的光滑映射,

a) 证明集 $f(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的光滑曲面.

b) 这个曲面的维数由映射 f 的什么特征性质确定?

作业 3.　a) 应用 § 例 4, 给出二维环面的定向图册.

b) 证明, 莫比乌斯带没有定向图册.

c) 证明在微分同胚 $f:D\to\tilde{D}$ 下, 有向曲面 $S\subset D$, 变为有向曲面 $\tilde{S}\subset\tilde{D}$.

作业 4.　a) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为一曲面, $\bar{S}$ 是 S 在 $\mathbb{R}^n$ 内的闭包. 试问, 集 $\bar{S}\setminus S$ 是不是 S 的边界?

b) 曲面 $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\}$ 是否有边界?

c) 求出曲面 $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\}$ 的边界.

作业 5. 在空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 按笛卡尔坐标给出螺旋面:

$$y-x\tan\frac{z}{h}=0,\quad |z|\le\frac{\pi}{2}h.$$

试作出它的图形, 并求出它的满足 $r^2\le x^2+y^2\le R^2$ 的那一部分的面积.

解答作业 1. 1) 分情况讨论, $\alpha=0$ 时, $(0,0)$ 外任何一点同胚与 $\mathbb{R}$, 但 $(0,0)$ 点的任何邻域不同胚于 $\mathbb{R}$, 因此 E_0 不是曲面. 下面考虑 $\alpha>0$ 的情况,

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\alpha}\sec\theta; \\ y &= \sqrt{\alpha}\tan\theta. \end{cases}$$

容易据此构造图册, 并证明 E_α 是曲面. 该曲面有两支, 显然不连通. $\alpha<0$ 的情况类似. 2) 同上, $\alpha=0$ 时不是曲面, $\alpha\neq 0$ 时是二维不连通曲面. 3) 同上, $\alpha=0$ 时不是曲面, $\alpha\neq 0$ 时是二维不连通曲面, $\alpha>0$ 时, 可以考虑下列变换

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\alpha}\cos\theta; \\ y &= \sqrt{\alpha}\sin\theta\sec\phi; \\ z &= \sqrt{\alpha}\sin\theta\tan\phi. \end{cases}$$

4) $\alpha<0$ 时, $E_\alpha=\emptyset$, 不是曲面; $E_0=\{-1,1\}$ 不是曲面. $\alpha>0$ 时, 令 $z=a+bi$, 则

$$E_\alpha=\{(a,b)\mid (a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2=\alpha^2\}.$$

于是 $\alpha\in(0,1)$ 是不连通一维曲面, $\alpha=1$ 不是曲面 (同上面 $\alpha=0$ 的情况), $\alpha>1$ 是连通一维曲面.

解答作业 2. 课堂讨论

解答作业 3. 课堂讨论

解答作业 4. a) 带边曲面的边界定义与之前集合的边界的定义并不相容, 不要搞混, 这里 $\bar{S}\setminus S$ 和 ∂S 根本没有关系. 一般情况下, 曲面集合意义下边界就是其本身. b) 没有边界; c) $\partial S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$; $\partial S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$.

解答作业 5. 该螺旋面在 $D:=\{(x,y)\mid r^2\le x^2+y^2\le R^2\}$ 内的参数方程是

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta; \\ y &= \rho\sin\theta; \\ z &= h\theta, \end{cases}$$

也即 $r(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,h\theta)^\top$, 其中 $(\rho,\theta)\in S:=\{(\rho,\theta)\mid r\le\rho\le R, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$. 于是 $\dot{r}_\rho=(\cos\theta,\sin\theta,0)^\top$, $\dot{r}_\theta=(-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,h)^\top$. 因此 $E:=\langle\dot{r}_\rho,\dot{r}_\rho\rangle=1$, $E:=\langle\dot{r}_\rho,\dot{r}_\rho\rangle=1$, $F:=\langle\dot{r}_\rho,\dot{r}_\theta\rangle=0$, $G:=\langle\dot{r}_\theta,\dot{r}_\theta\rangle=\rho^2+h^2$. 因此, 螺旋面在 S 中的面积 σ 为

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint\limits_{(\rho,\theta)\in S}\sqrt{\rho^2+h^2}\,d\rho d\theta=\int_r^R d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2+h^2}\,d\theta \\
&= \int_r^R \pi\sqrt{\rho^2+h^2}\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left(\rho\sqrt{\rho^2+h^2}+h^2\ln|\rho+\sqrt{\rho^2+h^2}|\right)\Big|_r^R \\
&= \frac{\pi}{2}\left(R\sqrt{R^2+h^2}-r\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left|\frac{R+\sqrt{R^2+h^2}}{r+\sqrt{r^2+h^2}}\right|\right).
\end{aligned}$$