中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 11 月 22 日，10:00-12:00

考题 1. 设 A, B, C 都是集合 M 的子集. 请证明:

$$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow (C \subset (A \cap B)).$$

解答 1. 先证明 $\Rightarrow$. 对任意 $c \in C$, 我们有 $c \in A$ 并且 $c \in B$, 因此 $c \in A \cap B$, 因此 $C \subset (A \cap B)$.
再证明 $\Leftarrow$. 对任意 $c \in C$, 我们有 $c \in A \cap B$, 因此 $c \in A$ 并且 $c \in B$, 因此 $C \subset A$ 和 $C \subset B$ 同时成立.

考题 2. 设集合 X 满足 $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(X)$, 其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集合. 请证明: 集合 $Y = X \cup \mathbb{N}$ 满足 $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.

解答 2. 因为 $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(X)$, 所以存在 X 的子集 J, 使得 J 和 $\mathbb{N}$ 存在一一对应, 这意味着 J 是无穷集, 并且 $\operatorname{card}(J) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$. 我们有 $\operatorname{card}(J) = \operatorname{card}(J \cup \mathbb{N})$; 另一方面, 由于 $J \in (J \cup (X \cap \mathbb{N})) \in (J \cup \mathbb{N})$, 我们有我们得到 $\operatorname{card}(J) \leq \operatorname{card}(J \cup (X \cap \mathbb{N})) \leq \operatorname{card}(J \cup \mathbb{N})$, 因此 $\operatorname{card}(J \cup (X \cap \mathbb{N})) = \operatorname{card}(J \cup \mathbb{N})$. 于是存在一一映射 $h : J \cup (X \cap \mathbb{N}) \mapsto J \cup \mathbb{N}$. 我们构造如下映射 $f : X \mapsto Y$: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{如果} x \in X \setminus (J \cup (X \cap \mathbb{N})); \\ h(x), & \text{如果} x \in J \cup (X \cap \mathbb{N}). \end{cases}$ 根据上面的分析, f 是一一映射, 证毕.

考题 3. 设 $\alpha > 1$, 求极限

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

解答 3. a) 记 $b_n = \frac{n^\alpha}{\alpha^n}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n/b_{n-1}| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^\alpha \right| = \frac{1}{\alpha} < 1$, 因此对于 $1/\alpha < q < 1$, 存在 $N > 0$, 使得 $\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq q$, 对任何 $n > N$ 成立. 也即 $0 < b_n \leq b_N q^{n-N}$ 对任意 $n > N$ 成立, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_N q^{n-N} = 0$, 由两边夹定理, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

b) 记 $b_n = \frac{\alpha^n}{n!}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha^n}{n!} / \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha}{n} \right| = 0 < 1$, 因此存在 $N > 0$, 使得 $\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$, 对任何 $n > N$ 成立. 也即 $0 < b_n \leq b_N/2^{n-N}$ 对任意 $n > N$ 成立, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_N/2^{n-N} = 0$, 由两边夹定理, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

c) 由于 $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. 由两边夹定理, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

考题 4. 设数列 $\{a_n, n = 1, 2, ...\}$ 和 $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ 满足

a) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) 存在 $M>0$, 使得 $-M\le\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\le M$ 对所有 n 都成立.

请证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

解答 4. 对任意给定的 $\epsilon>0$. 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 我们知道存在 $N>0$ 使得 $|a_n|\le\epsilon/(2M)$, 对任何 $n\ge N$ 成立. 另外结合单调性, 我们有 $a_n\ge 0$ 对任意 $n=1,2,\cdots$.

为方便起见, 我们记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$. 则对任意 $m\ge n\ge N$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=n}^{m}a_ib_i\right|=\left|\sum_{i=n}^{m}a_i(S_i-S_{i-1})\right|=\left|-a_nS_{n-1}+\sum_{i=n}^{m-1}(a_i-a_{i+1})S_i+a_mS_m\right|\\
\le\ &|a_nS_{n-1}|+\sum_{i=n}^{m-1}(|a_i-a_{i+1}||S_i|)+|a_mS_m|\\
\le\ &\left(|a_n|+\sum_{i=n}^{m-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_m|\right)M\\
\le\ &(|a_n|+|a_n-a_m|+|a_m|)\,M\ \le\ 2|a_n|M\ \le\ \epsilon.
\end{aligned}
$$

这里最后两个不等式都用到了 $\{a_n\}$ 的单调性. 因此, 根据柯西准则, 级数收敛.

考题 5. 设 $n(k)(k=1,2,\cdots)$ 是从自然数集合 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个一一映射. 令 $b_k=a_{n(k)}(k=1,2,\cdots)$, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的一个重排. 证明对任何实数 α, 存在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的一个重排, 使得该重排级数之和为 α.

解答 5. 首先, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\ge\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1}\ge\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$ 对任意 m 成立, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也都发散.

对于任何实数 α, 不妨假设 $\alpha\ge 0$ ($\alpha<0$ 时同理可证). 我们考虑如下级数:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right), \tag{1}
$$

这里 $\{a(k)\}$ 和 $\{b(k)\}$ 满足 $0=b(0)<a(1)<b(1)<a(2)<b(2)<\cdots$ 以及

$$
\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)+\sum_{i=b(k-1)+1}^{a(k)}\frac{1}{2i}>\alpha\ge\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)+\sum_{i=b(k-1)+1}^{a(k)-1}\frac{1}{2i}
$$

以及

$$
\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)<\alpha\le\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)+\frac{1}{2b(k)-1}
$$

对任意 k 成立. 因此我们容易知道级数(1)是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的一个重排, 并且对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N>0$ 使

得 $\frac{1}{(2b(k-1)-1)}<\epsilon$. 于是我们有对任意 $k>N$, $s_1\in[b(n-1)+1,a(n)]$, $s_2\in[a(n)+1,b(n)]$, 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)+\sum_{i=b(n-1)+1}^{s_1}\frac{1}{2i}-\alpha\right| &\leq \min\left\{\frac{1}{2a(k)},\frac{1}{2b(k-1)-1}\right\}<\epsilon;\\
\left|\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i=b(n-1)+1}^{a(n)}\frac{1}{2i}-\sum_{i=a(n)+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}\right)+\sum_{i=s_2+1}^{b(n)}\frac{1}{2i-1}-\alpha\right| &\leq \min\left\{\frac{1}{2a(k)},\frac{1}{2b(k)-1}\right\}<\epsilon.
\end{aligned}$$

因此级数(1)收敛到 α.

考题 6. 利用 $\epsilon-\delta$ 语言证明 $f(x)=x^2+x\sin x$ 在 $x=1$ 处是连续的.

解答 6. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\min\left\{1,\frac{\epsilon}{5}\right\}>0$, 使得对任意 $|x-1|<\delta$, 我们有

$$\begin{aligned}
& |f(x)-f(1)|=|x^2+x\sin x-1-\sin 1|\leq|x^2-1|+|x\sin x-\sin x+\sin x-\sin 1|\\
\leq\ & |x-1||x+1|+|x-1||\sin x|+|\sin x-\sin 1|\leq 3|x-1|+|x-1|+2\left|\cos\left(\frac{x+1}{2}\right)\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\\
\leq\ & 4|x-1|+2|(x-1)/2|=5|x-1|<\epsilon.
\end{aligned}$$

这里第四个不等式用到了 $|\sin(x)|\leq|x|$ 对任意 $x\in[0,2]$ 成立. 证毕.

考题 7. 定义函数 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 如下

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{N}, & \text{如果}x\in\mathbb{Q},\mathbb{N}\text{是}x\text{表示为}\frac{Z}{N}(Z\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N})\text{ 的最小}N;\\ 0, & \text{如果}x\neq\mathbb{Q},\end{cases}$$

解答 7. 对于任何有理点 $\frac{Z}{N}$, 存在 $\epsilon=\frac{1}{N+1}$, 对任意 $\delta>0$, 我们知道必存在无理点 y 使得 $\left|y-\frac{Z}{N}\right|<\delta$, 并且 $\left|f(y)-f\left(\frac{Z}{N}\right)\right|\geq|0-\frac{1}{N}|>\frac{1}{N+1}=\epsilon$, 因此 $f(x)$ 在有理点不连续.

下面考虑无理点 y, 首先对任何 $\epsilon>0$, 存在 N 使得 $\frac{1}{N}<\epsilon$. 对任意 $\delta'>0$, 我们知道在 y 的邻域 $[y-\delta',y+\delta']$ 中分母小于等于 N 的有理数个数是有限多个, 不妨设为 $q_1,...,q_s$. 因此, 我们记 $\delta=\min\{\delta',\frac{1}{2}\min\limits_{i=1,...,s}|q_i-y|\}$, 则 $|f(x)-f(y)|\leq|\frac{1}{N+1}-0|\leq\epsilon$, 对任意 $|x-y|\leq\delta$ 成立. 因此 $f(x)$ 在所有无理点连续.

考题 8. 证明连续函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

解答 8. 首先我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\pi-\pi/2}-\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n^2\pi^2-\pi^2/4}=0$. 也就是说对于任意 $\delta>0$, 存在 N, 使得任何 $n>N$, 我们有 $\left|\frac{1}{2n\pi+\pi/2}-\frac{1}{2n\pi-\pi/2}\right|\leq\delta$ 并且 $\frac{1}{2n\pi+\pi/2},\frac{1}{2n\pi-\pi/2}$ 都在区间 $(0,1)$ 内.

取 $\epsilon=1$, 对任意的 $\delta>0$, 我们知道存在 $x_1=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ 和 $x_2=\frac{1}{2n\pi-\pi/2}$, 使得 $|x_1-x_2|\leq\delta$, $x_1,x_2\in(0,1)$, 并且 $|f(x_1)-f(x_2)|=|1-(-1)|=2>\epsilon$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.