# 中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 8

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 11 月 22 日，8:00-9:40

**作业** 1. a) 证明, 开区间上的单调函数的反函数在自己的定义域上连续.

b) 构造一个具有可数个间断点的单调函数.

c) 证明, 若函数 $f : X \to Y$ 和 $f^{-1} : Y \to X$ 互反 (这里 $X, Y$ 都是 $\mathbb{R}$ 的子集) 且 $f$ 在点 $x_0 \in X$ 连续, 那么, 由此还不能推出函数 $f^{-1}$ 在点 $y_0 = f(x_0) \in Y$ 连续.

**作业** 2. 设 $f$ 和 $g$ 是定义在同一个集合 $X$ 上的有界函数. 量

$$\Delta = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

称为有界函数 $f$ 和 $g$ 之间的距离; 它表示在给定的集 $X$ 上, 一个函数近似于另一个函数的好坏程度如何. 设 $X$ 是闭区间 $[a, b]$. 证明, 如果 $f, g \in C[a, b]$, 那么, $\exists x_0 \in [a, b]$, 使 $\Delta = |f(x_0) - g(x_0)|$, 而对于任意的有界函数, 此事一般说来并不成立.

**作业** 3. 证明: 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 而且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是一致连续的.

**作业** 4. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. 求 $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$.

**作业** 5. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{如果} x \neq 0; \\ 0, & \text{如果} x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的导数.

**作业** 6. 求导数 $y'_x$

(a) $y = x^x \quad (x > 0)$

(b) $y = \sin(\sin(x))$

**作业** 7. 设 $f(x)$ 是可微函数, 如果 $(f(x^2))'_x = (f^2(x))'_x$ 在 $x = 1$ 成立, 则 $f(1) = 1$ 或者 $f'(1) = 0$.

**解答作业** 1. a) 不妨假设 $f(x)$ 单调不减, 则 $f^{-1}$ 也是单调不减. 假设 $f^{-1}(x)$ 在 $(a,b)$ 上某点 $c$ 间断, 则 $\lim\limits_{x\to c^-} f^{-1}(x) < f^{-1}(c)$ 和 $f^{-1}(c) < \lim\limits_{x\to c^+} f^{-1}(x)$ 必有一个成立. 不是一般性, 设前者. 则存在 $\alpha$ 使得 $\lim\limits_{x\to c^-} f^{-1}(x) < \alpha < f^{-1}(c)$, 于是 $x < f(\alpha) < c$ 对任意 $x \in (a,c)$ 成立, 这和开区间矛盾. 证毕.

b) $f(x) = 2[x] + \{x\}$

c) 记 b) 中函数是 $f^{-1}(x)$, 原函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 点连续, 但是 $f^{-1}$ 在 $y = f(2) = 1$ 处不连续.

**解答作业** 2. 考虑连续函数 $f(x) - g(x)$ 和 $g(x) - f(x)$, 它们在 $[a,b]$ 上能取到最大值, 因此 $\Delta$ 也能取得.

反例: $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{如果} x \neq 0; \\ 1, & \text{如果} x = 0, \end{cases}$, $g(x) = 2$, 在 $[-1,1]$.

**解答作业** 3. 对任意 $\epsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 不妨设为 $\alpha$, 所以存在 $M > a$ 使得 $|f(x_1) - \alpha| < \epsilon/2$, 对 $\forall x_1 \geq M$ 成立. 另一方面, 我们知道 $f(x)$ 在 $[a, M+1]$ 内一致连续, 因此存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x_2) - f(x_3)| < \epsilon/2$, 对 $\forall x_2, x_3 \in [a, M+1]$ 并且 $|x_2 - x_3| \leq \delta$ 成立. 所以对任意 $y_1, y_2 \in [a, +\infty)$ 并且 $|y_1 - y_2| \leq \min\{1, \delta\}$, 我们有 $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

**解答作业** 4. 我们首先有, $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$, 因此有 $f'(1) = -8$, $f'(2) = f'(3) = 0$.

**解答作业** 5. 我们有

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

因此 $f'(x)\mid_{x=0} = 0$.

**解答作业** 6. (a) $\ln y = x \ln x$, 两边求导得: $y'_x/y = 1 + \ln x$, 因此 $y'_x = (1 + \ln x)x^x$.

(b) $y'_x = cos(sin(x))cosx$.

**解答作业** 7. 注意到: $(f(x^2))'_x \mid_{x=1} = 2xf'(x^2) \mid_{x=1} = 2f'(1)$, 以及 $(f^2(x))'_x \mid_{x=1} = 2f(x)f'(x) \mid_{x=1} = 2f(1)f'(1)$, 因此有 $f'(1)(f(1) - 1) = 0$. 证毕.

预祝大家期中考试成功!