中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 7

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 11 月 13 日，15:20-17:00

作业 1. 求极限:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},(a>0);\qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}.$$

作业 2. 设 $f(x):\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, 证 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$.

作业 3. 设 $f(x):\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 且 $f(x)>0$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 证 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{f\left(\frac{1}{x-1}\right)}=+\infty$.

作业 4. 证明若凸函数 $f\in\mathcal{C}[a,b]$, 则函数

$$\begin{aligned} m(x) &= \min_{a\le t\le x} f(t);\\ M(x) &= \max_{a\le t\le x} f(t), \end{aligned}$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

作业 5. 证明任意一个闭区间上连续函数的值的集合也是闭区间.

作业 6. 证明:

1) $x\sin(x)=O(x^2)$, $x\to 0$;

2) $x^3+x^2=O(x^3)$, $x\to+\infty$;

3) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$, $x\to a$.

作业 7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, n 为自然数, $x_1,\cdots,x_n\in(a,b)$. 证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(x)=\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$.

解答作业 1. a) 首先 $a=1$ 时, 极限显然为零. 下面考虑 $a>1$ 情形. 令 $y=a^x-1$, 则 $x=\log_a(y+1)$, 因此

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{1/y}}.$$

进而, 我们有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{1/y}}=\ln a,$$

及

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{y\to 0^-}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{1/y}}=\lim_{-y\to 0^+}\frac{\ln a}{\ln(1-(-y))^{-1/y}}=\lim_{-y\to 0^+}\frac{\ln a}{\ln(1+\frac{-y}{1+y})^{\frac{1+y}{-y}+1}}\\ &= \lim_{-y\to 0^+}\frac{\ln a}{\ln\left((1+\frac{-y}{1+y})^{\frac{1+y}{-y}}(1+y)\right)}=\ln a.\end{aligned}$$

最后当 $a<1$ 时, 也可以得到同样的结论. 综上所述, 极限是 $\ln a$.

b) 类似使用两边夹定理, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 可得此极限为 0.

解答作业 2. **请注意证明顺序**. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得对于任何 $x>M$, 有 $|f(x)-\alpha|<\epsilon$, 我们取 $\delta=1/M$, 则对任意 $0<x<\delta$, 有 $|f(1/x)-\alpha|<\epsilon$. 证毕.

解答作业 3. **请注意证明顺序**. 对任意 $M>0$, 存在 $N>0$, 使得对于任何 $x>N$, 有 $f(x)<1/M$, 我们取 $\delta=1/N$, 则对任意 $0<x-1<\delta$, 有 $1/f(1/(x-1))>M$. 证毕.

解答作业 4. 方便起见, 我们只考虑 $m(x)$ 的连续性. 首先我们容易知道 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不增, 对于任意 $c\in[a,b]$, 它在区间 $(c,b]$ 上有上界, 因此 $\lim_{x\to c^+}m(x)$ 存在; 同理, 由于其在 $[a,c)$ 上有下界, 因此 $\lim_{x\to c^-}m(x)$ 存在. 根据 $f(x)$ 在 c 处的连续性, 我们知道对任意 $\epsilon>0$, 存在 δ, 对任意 $0<x-c<\delta$, 有 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$, 因此 $m(x)=\min(m(c),\min\limits_{y\in[c,x]}m(y)>m(c)-\epsilon$ 也即 $m(c)-m(x)<\epsilon$, 也即 $\lim_{x\to c^+}m(x)=m(c)$. 同理可证 $\lim_{x\to c^-}m(x)=m(c)$. 连续性得证.

解答作业 5. 假设闭区间为 $[a,b]$, 我们分两步证明结论. 第一步, 证明魏尔斯特拉斯定理, 也即存在 $m\in[a,b]$ 使得 $f(m)=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 以及存在 $M\in[a,b]$ 使得 $f(M)=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 我们不妨证明前者, 后者同理可得. 令 $y=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 存在序列 $\{x_1,\cdots,x_k,\cdots\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_k)=y$. 由于 $\{x_k\}$ 存在收敛子列, 不妨设其收敛于 m, 由闭区间可以证明 $m\in[a,b]$, 由连续性我们可以证明 $f(m)=y$. 第一步证毕. 第二步, 由于 $[m,M]\in[a,b]$ 或者 $[M,m]\in[a,b]$, 因此介于 $f(m)$ 和 $f(M)$ 之间的数 α, 都存在 $c\in[m,M]$ 或者 $c\in[M,m]$ 使得 $f(c)=\alpha$. 综上, 证毕.

解答作业 6. 1) 因为 $\alpha(x)=x\sin(x)/x^2=\sin(x)/x\to 1$, 当 $x\to 0$ 时. 2) 同理. 3) 如果 $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to a}\alpha_2(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)+\alpha_2(x)=0$, 证毕.

解答作业 7. 作业 5 的推论.

有兴趣的同学可以搜索“希尔伯特 (Hilbert) 的无穷旅馆”来更好地理解无穷.