中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 6

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 11 月 1 日，8:00-9:40

作业 1. 级数求和:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}; \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

作业 2. 级数求和:

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{9}{16}-\frac{11}{32}+\cdots.$$

作业 3. 研究下列级数的收敛性

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}; \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

作业 4. 设 $\{a_n\}$ 是单调不增趋于零的数列, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$ 同时收敛或同时发散, 其中 p_n 是满足 $a_k \geq 2^{-n}$ 的项 a_k 的最大指标.

作业 5. 求极限

$$a)\quad \lim_{x\to 0^+} x^x; \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}; \qquad c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}; \qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}.$$

作业 6. 根据定义证明

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

作业 7. 求极限, 其中 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}; \qquad 2)\quad \lim_{x\to 1}\left[\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right]; \qquad 3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}.$$

习题 1. 假设数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a_{n+1}|=0$, 请问该数列的收敛性, 为什么?

解答作业 1. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.

b) 令 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, 则 $2S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$, 两式相减可得: $S = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

解答作业 2. 令 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{n-1}}$, $2S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{n-2}}$, 两式相加可得: $3S = 2 - 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 2/3$, 因此 $S = 2/9$.

解答作业 3. 使用柯西根值校验法, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2}{e} < 1$, 所以级数 a) 收敛; 又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = \frac{3}{e} > 1$, 所以级数 b) 发散.

解答作业 4. 令 $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $2B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})2^{-n}$ $(p_0 = 0)$, 根据 p_n 定义, 我们有 $A \geq B$, $A - \sum\limits_{i=1}^{p_1} a_i \leq 2(B - p_1/2)$. 因此同收敛同发散.

解答作业 5. a) 取 $1/n \to 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)^{(1/n)} = 1/\sqrt[n]{n} = 1$ [1]; b) 取 $n \to +\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{n} = 1$; c) 取 $1/n \to 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log_a e = 1/\ln a$; d) 取 $1/n \to 0$, 我们需要求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{1/n} - 1\right)$, 令 $b_n = a^{1/n} - 1$, 则 $\ln(1 + b_n) = \ln a/n$, 因此 $n\left(a^{1/n} - 1\right) = b_n \ln a/\ln(1 + b_n) = \ln a/\ln(1 + b_n)^{1/b_n}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{1/n} - 1\right) = \ln a$.

解答作业 6. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = 6\epsilon/(1 - \epsilon)$, 则有

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| < (6 + \delta)|x - 3| < \frac{\delta}{6 + \delta} = \epsilon,$$

对任意 $0 < |x - 3| < \delta$ 成立. 故证毕.

解答作业 7. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1} x^i}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i} = \frac{m}{n}$; 2) 先证明 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^i - n}{x-1} = \frac{n(n-1)}{2}$, 然后, $m = n$ 时, 易得 0, 不妨设 $m > n$, 可得:

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right] = \frac{(m-n)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{(m-n)(m-n+1)}{2}}{mn} = \frac{m - n}{2}.$$

同理可得 $m < n$ 时, 亦是此值. ; 3) 同理可得 10.

解答习题 1. 不一定收敛, 反例: 1, 0.5, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 0.875, 0.75, $\cdots$

[1] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.