中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 5

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 10 月 25 日，8:00-9:40

作业 1. 试证: 如果 $a>0$, 那么数列 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ 收敛于 a 的算数平方根, 其中 $x_1\neq 0$. 估计收敛速度, 即估计与 n 有关的绝对误差 $|\Delta_n|=|x_n-a|$.

作业 2. 试证

a) $S_0(n)=1^0+\cdots+n^0=n$,
$S_1(n)=1^1+\cdots+n^1=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$,
$S_2(n)=1^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$,
$S_3(n)=1^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$.
如果记 $S_k(n)=1^k+\cdots+n^k$, $k\in\mathbb{N}$, 那么 $S_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+\cdots+a_1n+a_0$, 它是 n 的 $k+1$ 次多项式.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_k(n)}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$.

作业 3. 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 都是有界数列, 求证

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n &\leq \limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n;\\
\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n.
\end{aligned}$$

作业 4. 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 都是有界非负数列, 求证

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\liminf_{n\to\infty}y_n &\leq \limsup_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n;\\
\liminf_{n\to\infty}x_n\cdot\liminf_{n\to\infty}y_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\liminf_{n\to\infty}y_n.
\end{aligned}$$

作业 5. 如果 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

作业 6. 如果 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

作业 7. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

作业 8. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots$, 请分析级数

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-\cdots+(-1)^{n+1}a_n$$

的收敛性.

解答作业 1. 不妨设 $x_1 > 0$. 则对任意 $k > 1$, $x_k > 0$. 令 $z_k = x_k/\sqrt{a}$, 于是 z_k 迭代公式是: $z_{k+1} = \frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right) \geq 2$, 于是

$$z_{k+1} - 1 = \frac{1}{2}\left((z_k - 1) + \frac{1 - z_k}{z_k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z_k}\right)(z_k - 1) \leq \frac{1}{2}(z_k - 1).$$

因此 $z_{k+1} - 1 \geq 1$ 并且 $z_{k+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(z_k - 1)$, 故而 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_k - 1) = 0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = \sqrt{x_k}$.

另一方面 $\Delta_{k+1}/\Delta_k^2 = (\sqrt{a}(z_{k+1}-1))/(\sqrt{a}(z_k-1))^2 = 1/(2z_k\sqrt{a})$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_{k+1}/\Delta_k^2 = 1/(2\sqrt{a})$.

如果 $x_1 < 0$ 可得类似的收敛结果至 $-\sqrt{a}$.

解答作业 2. 参见附件.

解答作业 3. 只证第一个式子, 第二个同理. 总存在收敛子列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}) = \limsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. $\{x_{n_k}\}$ 有收敛子列 $x_{n_{k_i}}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 并且 $y_{n_{k_i}}$ 有收敛子列 $\{y_{n_{k_{i_j}}}\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} y_{n_{k_{i_j}}} = y \leq \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{j\to\infty}(x_{n_{k_{i_j}}} + y_{n_{k_{i_j}}}) = x + y \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

另一方面, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. $\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $y_{n_{k_i}}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y \geq \liminf\limits_{n\to\infty} y_n$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} + y = \lim_{i\to\infty}(x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n).$$

解答作业 4. 同上.

解答作业 5. 上次练习的直接推论.

解答作业 6. 作业 5 的直接推论.

解答作业 7. 令 $x_n = n^n/n!$, 作业 6 的推论.

解答作业 8. 该级数收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 必要性易得, 下面证明充分性. 对任意 $\epsilon > 0$, 我们知道存在 N, 使得当 $n \geq N$ 时 $|a_n| < \epsilon/3$. 另一方面, 对任意 $m \geq n \geq N$, 我们有

$$|a_n + \cdots a_m| \leq |a_n - a_m| + |a_m| < 3|a_n| < \epsilon.$$