中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 4

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 10 月 18 日，8:00-9:40

作业 1. 求极限:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 其中 $\{a_n\}$ 定义为:

$$\frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}},\quad \cdots$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n+3}{n}\pi\right)$

作业 2. 证明数列

$$\frac{2}{1},\quad \frac{2}{1}\frac{2}{3},\quad \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3},\quad \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5},\quad \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5},\quad \cdots$$

有极限.

作业 3. 试证明: 数 $x\in\mathbb{R}$ 是有理数的充要条件是, 它在任何 q 进位计数法中是循环的, 即从某一位开始, 就由一组数码重复循环组成.

作业 4. 皮球从高为 h 之处落下时, 反跳起来的高度是 qh, 这里 q 是常数系数, $0<q<1$. 求它完全落地而不再跳起来所需的时间, 以及直到这个时刻前, 皮球所经过的路程.

作业 5. 圆周上有一固定点, 把圆周转动 n 个弧度, n 取一切自然数, 就得到圆周上的许多点, 试求这样得到的点集的所有极限点.

习题 1. 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

解答作业 1. 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\cdots$, 斐波那契数列 $\{f_n\}$. 待定系数法可得 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]$, 因此 $a_n=\frac{f_{n+2}}{f_{n+3}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) 因为 $\sqrt{i(n-i)}\le\frac{n}{2}$, 则 $\frac{1}{2}(\ln i+\ln(n-i))\le\ln\frac{n}{2}$, 从而

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ln i\le(n-1)\ln\frac{n}{2},\qquad (n-1)!\le\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

两边同乘以 $\frac{n}{2}$, 于是 $\frac{1}{2}n!\le\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 进而 $\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{2^{n-1}}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n+3}{n}\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)+\cos(\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)=0$.

解答作业 2. 首先证明有界性, $a_k\in(0,2]$. 由于 $\{a_{2k}\}$ 单调下降, 因此有极限. 另一方面 $\{a_{2k+1}\}$ 单调上升, 因此也有极限. 假设极限不一样, 则矛盾, 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2k+1}-a_{2k})=0$.

解答作业 3. 有理数即分数. 有限小数与无限循环小数是有理数显然. 只需证有理数必不能是无限不循环小数. 主要是分母有限, 余数有限多个, 一旦余数重复, 即开始循环数码组.

解答作业 4. 时间: $\frac{1}{2}T^2g=h$, 因此 $T=\sqrt{2h/g}$. 因此总时间是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2h/g}+\sum_{i=1}^{n}2(\sqrt{q})^i\sqrt{2h/g}=\left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)\sqrt{2h/g}.$$

距离: $\lim\limits_{n\to\infty}h+\sum_{i=1}^{n}2q^ih=\left(\frac{1+q}{1-q}\right)h$.

解答作业 5. 我们首先证明所有这些点都是极限点. 也即要证明集合

$$\Omega:=\left\{p-q(2\pi)\mid p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{Z}^+,\ p-q(2\pi)\in[0,2\pi)\right\},$$

中的任何元素 $c=p_0-q_0(2\pi)$ 都是极限点. 对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\epsilon\ge\frac{1}{n}$. 我们记 $h(x)$ 为 x 的小数部分. 另一方面取 $q=1,2,...,(n+1)$, 则至少有两个 $h(q(2\pi))$ 落在如下 n 个区间的两个中: $[0,1/n)$, $[1/n,2/n)$, ..., $[(n-1)/n,1)$. 不妨设为 q_1 和 q_2, 且 $q_1<q_2$, 我们取 $p=[q_2(2\pi)]-[q_1(2\pi)]+p_0$, $q=q_2-q_1+q_0$, 则有

$$|p-q(2\pi)-c|=|[q_2(2\pi)]-[q_1(2\pi)]-(q_2-q_1)(2\pi)|=|h(q_1(2\pi))-h(q_2(2\pi))|<\frac{1}{n}\le\epsilon.$$

下面证明 $[0,2\pi)$ 中所有点都是极限点. 假设 $d\in[0,2\pi)$ 不是极限点, 则存在 $\delta_0>0$, 使得 $(d-\delta_0,d+\delta_0)\cap\Omega=\emptyset$ (注意, 因为 0, 2π 是极限点, 所以我们不用担心这样的 δ_0 使得 $d-\delta_0<0$ 或者 $d+\delta_0\ge2\pi$), 我们可以记 $\delta_1:=\sup\{\delta_0\mid(d,d+\delta_0)\cap\Omega=\emptyset\}$, $\delta_2:=\inf\{\delta_0\mid(d-\delta_0,d)\cap\Omega=\emptyset\}$.

根据 δ_2 是下确界, 对 $\epsilon=(\delta_1+\delta_2)/4>0$, 存在 $c_1=p_1-q_1(2\pi)\in(d-\delta_2-\epsilon,d-\delta_2)$ 使得 $c_1\in\Omega$. 由于 c_1 是极限点, 因此存在 $c_2=p_2-q_2(2\pi)\in(c_1-\epsilon/2,c_1+\epsilon/2)$. 不妨设 $c_1<c_2$, $\delta=c_2-c_1$. 再次根据 δ_1 是上确界, 存在 $c_3=p_3-q_3(2\pi)\in(d+\delta_1,d+\delta_1+\delta/2)$ 使得 $c_3\in\Omega$, 且 $p_3>p_2$. 于是令 $p_4=p_3-p_2+p_1$, q_4 使得 $c_4=p_4-q_4(2\pi)\in\Omega$. 易知 $c_3-c_4=c_2-c_1$, 因此 $c_4\in(d-\delta_2,d+\delta_1)$. 矛盾.

赵恩彤同学关于第二部分的证明方法: 首先对任意 $x\in\mathbb{R}$, 和 $d\in\mathbb{R}$ 满足 $|d|\le1/n$, 必存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $|md-x|<1/n$, 令 $m=\mathrm{sign}(d)m'$, 其中 $m':=\sup\{i\in\mathbb{N}\mid m|d|<x+1/n\}$ 即可. 由于对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 p_0, q_0 使得 $|p_0-q_0(2\pi)|<1/n$, 令 $d=p_0-q_0(2\pi)$ 即可证任意 Ω 中元素都是极限点.

解答习题 1. 令 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, 则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{\sum\limits_{i=N+1}^{n}}{n-N}\left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

假设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$. 于是可设 $\frac{\sum_{i=N+1}^{n}}{n-N} = a + b$, 这里 $|b| < \epsilon$. 于是 $\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a+b)\left(1 - \frac{N}{n}\right)$, 因此

$$\left\|\frac{s_n}{n} - a\right\| \leq \frac{|s_n|}{n} + |b| + (|a| + |b|)\frac{N}{n}.$$

取 $N' > N$, 使得对任意 $n > N'$, 恒有 $\frac{|s_n|}{n} < \epsilon$ 和 $\frac{N}{n} \leq \frac{\epsilon}{|a|+\epsilon}$. 得证.

注意: 反之不然, $x_n = (-1)^{n+1}$.