中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 2

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 9 月 27 日，8:00-9:40

作业 1. 证明偏序集有可能不是有序集.

作业 2. 对于一个有序集 X, 定义关系 “$\leq$” 如下:

$$(a \leq b) \Leftrightarrow (a = b) \vee (a < b).$$

证明集合 X 上的关系 “$\leq$” 是一个偏序.

作业 3. 证明结合 $\{0, 1, 2\}$ 上加法 “$+$” 采用 $\mod (3)$ 的加法, 是一个阿贝群.

作业 4. 设 $A + B$ 是形如 $a + b$ 的数的集合, $A \cdot B$ 是形如 $a \cdot b$ 的数的集合, 其中 $a \in A \subset \mathbb{R}$, $b \in B \subset \mathbb{R}$. 试检查是否总有

a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

作业 5. 设 $-A$ 是形如 $-a$ 的数的集合, 这里 $a \in A \subset \mathbb{R}$, 试证, $\sup(-A) = -\inf A$.

作业 6. 如果 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 那么 $\sup A \leq \sup B$, 而 $\inf A \geq \inf B$.

解答作业 1. 偏序列集不是有序集: 子集合构成的集合, 关系是"$\subset$".

解答作业 2. 只需要按照定义证明:

1) 对任何 $a \in X$, $a \leq a$;

2) $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$;

3) $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a = c)$.

解答作业 3. $\mod (3)$ 的加法定义如下:

$$\begin{aligned} &0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 0+2=2; \\ &1+0=1, \quad 1+1=2, \quad 1+2=0; \\ &2+0=2, \quad 2+1=0, \quad 2+2=1. \end{aligned}$$

如下只需验证:

1) 存在"0"元素使得 $0 + x = x + 0 = x$, 对任意 $x \in \{0, 1, 2\}$ 成立;

2) 存在"负元素", $-0 = 0$, $-1 = 2$, $-2 = 1$;

3) 分配律: $x + (y + z) = (x + y) + z$, 对任意 $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ 成立;

4) 交换律: $x + y = y + x$, 对任意 $x, y \in \{0, 1, 2\}$ 成立.

解答作业 4. 先考虑 a), 假设 A 和 B 都是有界的, 答案是肯定的. 现证明 $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$: 因为 $a \leq \sup A$, $b \leq \sup B$, 所以 $a + b \leq \sup A + \sup B$. 而 $\sup(A + B)$ 是 $A + B$ 上界里最小的; 再证明 $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$, 用反正法, 假设 $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$, 则记 $0 < \delta = supA + \sup B - \sup(A + B)$. 因为 $\sup A$ 是 A 的上确界, 因此 $\sup A - \frac{1}{2}\delta$ 不是上界, 故而存在 $a \in A$ 使得 $a > \sup A - \frac{1}{2}\delta$, 同理, 存在 $b \in B$ 使得 $b > \sup B - \frac{1}{2}\delta$, 两式相加我们有, $\sup(A+B) < a+b$, 矛盾.

再考虑 b), 答案是否定的, 令 $A = B = \mathbb{R}^-$, $A \cdot B$ 无上界.

解答作业 5. 这里我们假设 A 有界. 只需证明 $\sup(-A) \geq -\inf A$ 以及 $\sup(-A) \leq -\inf A$.

解答作业 6. 这里我们假设 A 和 B 有界. 我们知道对于两个实数 $r(X)$ 和 $r(Y)$, $r(X) \leq r(Y)$ 意味着 $X \subset Y$. 假设对任意 $a \in A$ 都有对应的戴德金分割 $\mathcal{D}(X_a)$, 定义 $X_A = \cup_{a \in A} X_a$, 则我们知道 X_A 对应戴德金分割所定义的实数就是 $\sup A$. 同理我们定义 X_B, 因为 $A \subset B$, 所以很显然 $X_A \subset X_B$, 因此 $\sup A \leq \sup B$. 此外 $-A \subset -B$, 因此用上题结论, 得证.