# 中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 16

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 1 月 17 日，8:00-9:40

**作业** 1. 试证:

a) 第一类椭圆积分

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

当 $0\le k<1$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ 时有定义, 而且可以化成

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

的形式.

b) 第一类全椭圆积分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

当 $k\to1^-$ 时无限增加.

**作业** 2. 试证:

a) 积分指数

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$$

对于 $x<0$ 有定义且无穷可微.

b) 当 $x\to+\infty$ 时, 有

$$-\mathrm{Ei}(x)=\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^2}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right).$$

c) 对于任何 $x\in\mathbb{R}$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{x^n}$ 都不收敛.

d) 当 $x\to0^+$ 时, $\mathrm{li}x\sim\frac{x}{\ln x}$.

**作业** 3. 试证:

a) 函数

$$\mathrm{Fi}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt,$$

叫做概率误差积分, 常用符号 $\operatorname{erf}(x)$ 表示 (来源于英文 error function), 它是在 $\mathbb{R}$ 上定义的奇函数, 无穷可微且当 $x \to +\infty$ 时有极限.

b) 如果 a) 中所说的极限等于 1(确实如此), 则当 $x \to +\infty$ 时, 有

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + o\left( \frac{1}{x^7} \right) \right).$$

**作业** 4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调, 在点 $x=0$ 的邻域内是无界的. 证明如果反常积分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

收敛则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

# 预祝大家考试成功!

**解答作业** 1. a) 根据连续性, 对任意 $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x) \geq f(x_0)/2$, 对任意 $x_0 \in [a,b] \cap U(x_0,\delta)$ 成立. 这段区间的长度至少是 $\min\{\delta, b-a\}$. 证毕.

b) 引理 7.1.20.