中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 15

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 1 月 11 日，15:20-17:00

作业 1. 试证: 如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上有 $f(x) \geq 0$, 则

a) 当在 $f(x)$ 的某一连续点 $x_0 \in [a,b]$ 有 $f(x_0) > 0$ 时, 必成立严格不等式

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

b) 从条件 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 可推出在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f(x) = 0$.

作业 2. 试证: 如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则

a) $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, 其中 $\mu \in [m, M]$.

b) 当 f 在 $[a,b]$ 上连续时, 存在点 $\xi \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

作业 3. 试证: 如果 $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上成立, 以及 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

作业 4. 计算 $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

作业 5. 利用积分求

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2}\right]$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha \geq 0$.

作业 6. a) 试证: 开区间上的任何连续函数在该区间上都有原函数.

b) 试证: 如果 $f \in C^{(1)}[a,b]$, 则 f 可以表示成区间 $[a,b]$ 上的两个不减函数之差.

作业 7. 试证: 如果 $f \in C(\mathbb{R})$, 则对于任意确定的区间 $[a,b]$, 根据给定的 $\epsilon > 0$, 可以取 $\delta > 0$, 使得区间 $[a,b]$ 上成立不等式 $|F_\delta(x) - f(x)| < \epsilon$, 其中 F_δ 是例 6 中的平均函数.

作业 8. 试证: 积分中的重要变量替换公式 (9), 在没有替换函数单调的假定时, 仍然成立.

作业 9. 计算心脏线的弧长.

作业 10. a) 设 $y = f(x)$ 和 $x = g(y)$ 是互逆的连续, 非负函数, 且分别在 $x = 0, y = 0$ 时等于零. 试证明成立不等式:

$$xy \le \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt.$$

b) 从 a) 导出杨格不等式

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

其中 $x, y \ge 0$, $p, q > 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

c) 在问题 a) 和 b) 的不等式中等号有什么几何意义?

作业 11. 浦丰问题. 数 π 可以用以下非正统的方法计算: 取一张大纸, 画满间隔为 h 的平行直线. 我们将一根长为 $l < h$ 的针完全随意地扔在纸上. 设扔了 N 次, 其中有 n 次扔下地针与一条直线相交. 如果 N 充分大, 则 $\pi \approx \frac{2l}{ph}$, 其中 $p = \frac{n}{N}$ 可以解释做扔下的针与一条直线相交的概率. 试从计算面积的几何知识出发给这个计算 π 的方法一个满意的解释.

作业 12. 试证: 函数

a) $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (积分正弦) 是在 $\mathbb{R}$ 上定义的奇函数, 而且当 $x \to +\infty$ 时, 它有极限.

b) $\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义, 而且与 $\mathrm{Si}(x)$ 只差一个常数.

c) $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ (积分余弦) 对充分大的 x 可以用近似公式 $\mathrm{Ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}$ 计算, 试估计使绝对误差小于 10^{-4} 的那些 x 值的范围.

作业 13. 试证:

a) 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

只当 $\alpha > 0$ 时收敛, 而且只当 $\alpha > 1$ 时绝对收敛.

b) 菲涅耳积分

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt, \\ S(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt. \end{aligned}$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上是无穷可微函数, 而且当 $x \to +\infty$ 时, 它们都有极限.

作业 14. 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos(x)}{x+100} dx$ 是否收敛? 是否一致收敛?

解答作业 1. a) 根据连续性, 对任意 $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x) \geq f(x_0)/2$, 对任意 $x_0 \in [a,b] \cap U(x_0,\delta)$ 成立. 这段区间的长度至少是 $\min\{\delta, b-a\}$. 证毕.

b) 引理 7.1.20.

解答作业 2. a) 推论 7.2.7.

b) 利用 a) 及中值定理.

解答作业 3. $f \in C[a,b]$ 且有界, 推出 $f^n \in C[a,b]$ 且有界, 因此 $f^n\mathcal{R}[a,b]$. 对于任意 n, 我们有 $\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[\int_a^b M^n dx\right]^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{1/n}$, 因此我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq M$. 另一方面, 记 $f(y) = M$, 对任意 $\epsilon > 0$, 我们知道存在 $\delta > 0$ 使得 $f^n(x) \geq M^n - \epsilon$ 对任意 $x \in [a,b] \cap U(y,\delta)$ 成立. $\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \geq \left[\int_a^b (M^n-\epsilon)\delta dx\right]^{\frac{1}{n}} = (M^n-\epsilon)^{1/n}(b-a)^{1/n}$, 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \geq M$. 证毕.

解答作业 4. $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x dx = \int_0^{\pi/2}\cos^{n-1} x d\sin x = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2 x \cos^{n-2} x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, 所以 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 因为 $I_1 = 1, I_0 = \frac{\pi}{2}$, 我们有 $I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n = 2k; \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & n = 2k+1. \end{cases}$

解答作业 5. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}|_1^2 = \frac{1}{2}$..

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}|_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}$.

解答作业 6. a) 定理 7.3.4, $[a,b]$ 区间内除去 a, b 两端点.

b) $f(x) = \int_a^x f'(t)dt - (-\int_x^b f'(t)dt)$.

解答作业 7. 经过积分变量替换 $t = x + u$ 之后, 函数 $F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int_\delta^\delta f(x+u)du$. 利用中值定理, $F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}f(x+\xi)\cdot(2\delta) = f(x+\xi)$, 这里 $|\xi| \leq \delta$. 因此 $\lim\limits_{\delta\to O^+} F_\delta(x) = f(x)$, 证毕.

解答作业 8. 略.

解答作业 9. 心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. $S = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^+(-a\sin\theta)^2}d\theta = \int_0^{2\pi} 2a|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta = 4a\int_0^\pi|\cos\phi|d\phi = 8a$.

解答作业 10. a) 如图可证. b) $f(x) = x^{p-1}$, $g(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$, 因此 $q = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$, 因此 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. c) $y = f(x)$ 上所有的形如 (x,x) 的点.

解答作业 11. 基本事件区域为 $\{(x,\phi) \mid 0 \leq x \leq \frac{h}{2},\quad 0 \leq \phi \leq \pi\}$. 它的面积是 $h\pi/2$. 为了使得针与平行线相交, 必是与其最近的一条. 其充要条件是

- $0 \leq x \leq \frac{l}{2}\sin\phi$
- $0 \leq \phi \leq \phi$

这个可能的面积是 $\int_0^\pi \frac{1}{2}l\sin\phi d\phi = l$. 于是 $l/(h\pi/2) = n/N$, 证毕.

解答作业 12. a) 显然. b) 因为 $\mathrm{Si}(x) - \mathrm{si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ 收敛, 证毕. c) $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt = -\frac{\sin t}{t}|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}dt$.

解答作业 13. 狄里克雷判别法, 略.

解答作业 14. 首先 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos(x)}{x+100}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos(x)}{x+100}dx + \int_0^1\frac{\sqrt{x}\cos(x)}{x+100}dx$ 我们主要到第二部分是绝对收敛的, 因为 $\int_0^1\frac{\sqrt{x}|\cos(x)|}{x+100}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{y}|\cos(1/y)|}{y^2(1+100y)}dy \leq \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{100y^3}dy = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{100z^4}dz == \frac{2}{3}$. 而第一部分, 我们注意到, 不绝对收敛. 但是收敛, 这是因为 $|\int_1^b\cos(x)dx| \leq 2$ 对于任意 $b \geq 1$ 成立, 另一方面 $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调趋于零, 根据狄里克雷判别法, 此反常积分收敛.