中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 14

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 1 月 11 日，13:30-15:10

作业 1. 达布定理:

a) 设 $s(f;P)$ 和 $S(f;P)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上定义的有界实值函数对应于这个区间的分划 P 的下达布和及上达布和. 试证: 对于闭区间 $[a,b]$ 的任两个分划 P_1, P_2, 成立

$$s(f;P_1) \le S(f;P_2).$$

b) 设分划 $\tilde{P}$ 是闭区间 $[a,b]$ 分划 P 的开拓, 而 $\Delta_{i_1},\cdots,\Delta_{i_k}$ 是分划 P 的那样一些区间, 它们包含着属于分划 $\tilde{P}$ 但不属于分划 P 的点. 试证: 成立如下估计:

$$\begin{aligned} 0 \le S(f;P) - S(f;\tilde{P}) &\le \omega(f;[a,b])(\Delta_{x_{i_1}} + \cdots \Delta_{x_{i_k}}), \\ 0 \le s(f;P) - s(f;\tilde{P}) &\le \omega(f;[a,b])(\Delta_{x_{i_1}} + \cdots \Delta_{x_{i_k}}). \end{aligned}$$

c) $\underline{I} = \sup\limits_P s(f;P)$, $\bar{I} = \inf\limits_P S(f;P)$ 分别叫做函数在闭区间 $[a,b]$ 上的下达布积分和上达布积分, 试证: $\underline{I} \le \bar{I}$.

d) 试证达布定理:

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f;P); \qquad \bar{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f;P).$$

e) 试证: $(f(x) \in \mathcal{R}[a,b]) \Leftrightarrow (\underline{I} = \bar{I})$. (达布判别法)

f) 试证: $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, 当且仅当对于任何 $\epsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分划 P 使得 $S(f;P) - s(f;P) < \epsilon$.

作业 2. 证明不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), \qquad x \in (0,1]; \qquad f(0) = 0$$

在 $[0,1]$ 上黎曼可积. 当 $y \ne 0$ 时, $\operatorname{sgn}(y) = \frac{y}{|y|}$, 当 $y = 0$ 时, $\operatorname{sgn}(y) = 0$.

作业 3. 康托零测度集

a) 第二张第 4 节的问题 7 中所说的康托集是不可数的. 试验证, 它是勒贝格意义下的零测度集. 试问: 怎样修改康托集的构造方法可以得到类似的处处“有窟窿”但测度不是零的集合. (这种集合也叫康托集).

b) 设在区间 $[0,1]$ 上给定了一个函数, 它在某康托集外等于零, 而在康托集上等于 1. 试证: 当且仅当该康托集是零测度集时, 给定的函数是黎曼可积的.

c) 在区间 $[0,1]$ 上构造单调不减、连续的非常数函数, 而且最多除去一个具有零测度的康托集, 它的导数处处为零.

作业 4. 勒贝格判别法:

a) 直接验证 (不准使用勒贝格判别法) 本节例 2 中的黎曼函数的可积性.

b) 试证: 有界函数 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分划 P, 使函数在其上的振幅大于 ε 的那些区间的长度之和不超过 δ.

c) 试证: $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上有界且对于任何 ε 和 $\delta > 0$, 区间 $[a,b]$ 上使 f 的振幅大于 ε 的点的集合可以用有限多个开区间覆盖, 而这些开区间的长度和小于 δ. (杜布瓦雷蒙判别法)

d) 利用上题结果证明函数黎曼可积性的勒贝格判别法.

作业 5. 试证: 如果 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 f, g 是实的, 则 $\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$, $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.

作业 6. 试证:

a) 如果 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f(x) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

b) 如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f(x) = g(x)$, 则甚至当 g 在 $[a,b]$ 上定义且有界时, 它也可能是黎曼不可积的.

当堂小测验 4

测验 1. 设 $f(x) \in C^{(1)}[0,1]$, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 求证: $\int_0^1 |f(x) - f'(x)|dx \geq e^{-1}$.

测验 2. 设 $f(x) \in C^{(1)}[0,a]$, $a > 0$, 求证: $|f(0)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx$.

测验 3. 求椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

测验 4. 判别下列广义积分的收敛性:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx; \qquad \int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]dx.$$

测验 5. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

解答作业 1. a) 考虑两个分划的并集 P_3: $\Delta_1, \Delta_2 \cdots, \Delta_n$. 显然 P_3 是 P_1, P_2 的开拓. 则 $s(f;P_1) \le s(f;P_3) \le S(f;P_3) \le S(f;P_2)$.

b) $S(f;P) \ge S(f;\tilde{P})$ 显然, 另一方面 $S(f;P) - S(f;\tilde{P}) \le \sum_{j=1}^{k}(\omega(f;\Delta_{i_k})\Delta_{x_{i_k}}) \le \omega(f;[a,b]) \sum_{j=1}^{k} \Delta_{x_{i_k}}$. 同理第二式成立.

c) a) 的直接推论.

d) 根据下极限的定义, 我们有 $S(f;P) \ge \inf_P S(f;P)$, 对任意分划 P 成立. 所以 $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f;P) \ge \bar{I}$. 另一方面, 根据分划开拓的性质, 我们有 $S(f;P) \ge \lim_{\lambda(P)\to 0}$, 因此 $\bar{I} \ge \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f;P)$. 证毕. 同理可证另一半.

e) 夹逼定理, 具体见讲义.

f) 一方面 $S(f;P) - s(f;P) \ge \bar{I} - \underline{I}$, 得到充分性. 必要性可使用反证法, 由分划的任意性得到.

解答作业 2. 对于任何 $1 > \epsilon > 0$, 存在 N 满足 $N > 1/\epsilon$. 记 $x_k^- = \frac{1}{k\pi} - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, x_k^+ = \frac{1}{k\pi} + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, k = 1, ..., n$. 则分划 $P: 0 < x_n^- < x_n^+ < \cdots < x_1^- < x_1^+ < 1$, 满足 $\sum_{k=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta_{x_i} < \epsilon$.

解答作业 3. a) 不可数是因为与二进制 $0.\beta_1\beta_2\cdots$ 等势, 进而与 $[0,1]$ 实数集等势. 对任意 $\epsilon > 0$, 我们根据康托集合的构造方法, 依次将小区间分三段, 取两边, 取 $[\ln\epsilon/\ln(2/3)] + 1$ 次后, 剩下的小段和小于 ϵ, 显然小段总数是可数的, 因此是零测度集合. 非零测度集合构造方法: 分 2×4 份, 中间抠掉 2 份, 剩下的 2 部分, 都分 9 份, 中间抠掉 1 份, 剩下的 4 部分 $\cdots$ 分 $2\times(2k)^2$ 份, 中间抠掉 2 份, 剩下的 2^k 部分, 都分 $(2k+1)^2$ 份, 中间抠掉 1 份, 剩下的 2^{k+1} 部分 $\cdots$, 可以证明测度为 $\frac{1}{2}$.

b) 是否黎曼可积, 等价于对于任意 ϵ, 是否存在有限个集合覆盖所有康托集合, 且长度小于 ϵ, 即与零测集定义等价.

c) 任何 $x \in [0,1]$ 可以表示为 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots ...$, 假设 k 是使得 $\alpha_k = 1$ 的最小 k, 则 $f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

解答作业 4. a) 上周作业题 (8).

b) 先证明充分性, 如果 f 是常数函数, 证毕. 否则设 $L = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. 对于任何 $\epsilon > 0$, 取 $\varepsilon = \epsilon/2(b-a)$, $\delta = \epsilon/2L$, 设分划 $P: \Delta_1, \cdots, \Delta_N$ 则 $\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta_i \le \varepsilon(a-b) + L\cdot\delta = \epsilon$. 证毕. 必要性, 即存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得任意分划 P, 振幅大于 ε 的区间和的长度和大于 δ, 显然 f 不黎曼可积, 证毕.

c) 充分性同 b). 必要性利用引理 7.1.5, 黎曼可积函数在该区间有界.

d) 只需证明几乎处处连续等价于对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分划 P, 使函数在其上的振幅大于 ε 的那些区间的长度之和不超过 δ.

解答作业 5. 显然 $\omega(\max\{f,g\};\Delta) \le \max\{\omega(f;\Delta), \omega(g;\Delta)\}$, $\omega(\min\{f,g\};\Delta) \le \max\{\omega(f;\Delta), \omega(g;\Delta)\}$, 对任意区间 $\Delta \subset [a,b]$ 成立. 证毕.

解答作业 6. a) $h(x) := f(x) - g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. 根据大小和定义, 易得 $\int_a^b h(x) = 0$.

b) $f(x) = 0$, g 取 Dirichlet 函数 $D(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \notin Q. \end{cases}$ 证毕. 关键点在于几乎处处相等的两个函数一个连续, 另一个不一定连续.