中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 11

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 12 月 13 日，8:00-9:40

作业 1. 选择数 a 和 b 使得函数 $f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 当 $x \to 0$ 时是尽可能高阶的无穷小量.

作业 2. 证明: 若 $f \in C^{(\infty)}_{[-1,1]}$, $f^{(n)}(0) = 0$, 当 $n = 0, 1, \cdots$, 并且存在数 C, 使得

$$\sup_{-1 \le x \le 1} |f^{(n)}(x)| \le n! C^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

那么, 在 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

作业 3. 证明: 若函数 f 在点 x_0 处有直到 $n+1$ 阶导数, 则泰勒公式的拉格朗日余项

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^n,$$

其中的量 $\theta = \theta(x)$ 当 $x \to x_0$ 时趋于 $\frac{1}{n+1}$.

作业 4. 利用泰勒公式求极限

(a)

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right];$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

作业 5. 研究函数 $f(x)$ 并作出它的图像:

(a) $f(x) = \arctan \log_2 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$;

(b) $f(x) = \arccos\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$;

(d) $\varphi = \frac{\rho}{\rho^2 + 1}$, $\rho \ge 0$ (极坐标系中), 并标出它的渐近线;

(e) 指出在知道了函数 $y = f(x)$ 的图像之后怎样得到函数 $f(x) + B$, $Af(x)$, $f(x+b)$, $f(ax)$, 特别是 $-f(x)$ 和 $f(-x)$ 的图像.

作业 6. 证明: 如果 $f \in C(a, b)$ 且对于任意的点 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 成立不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么, 函数 f 在 (a,b) 上是凸的.

作业 7. 证明:

a) 若凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界, 则它是常值函数.

b) 若对于凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

则 $f(x)$ 是常值函数.

c) 对于定义在区间 $a<x<+\infty$ (或 $-\infty<x<a$) 上的任意的凸函数 f, 比值 $\frac{f(x)}{x}$ 当 x 沿着函数的定义域趋于无穷时趋于有限极限或趋于无穷.

作业 8. 证明: 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是凸函数, 则

a) 在任意点 $x\in(a,b)$ 处, 它有左导数 f'_- 和右导数 f'_+:

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(h)}{h},\quad f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(h)}{h},$$

并且 $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

b) 当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 时成立不等式 $f'_+(x_1)\le f'_-(x_2)$.

c) $f(x)$ 的图像的角点 (使 $f'_-(x)\neq f'_+(x)$ 的点) 是至多可数集.

作业 9. 定义在区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 的勒让德变换指的是函数

$$f^*(t)=\sup_{x\in I}(tx-f(x)).$$

证明:

a) 使 $f^*(t)\in\mathbb{R}$(即 $f^*(t)\neq\infty$) 的值 $t\in\mathbb{R}$ 的集合 I^* 或者是空集, 或者是单点集, 或者是区间, 而在最后一种情况, 函数 $f^*(t)$ 在 I^* 上是凸的.

b) 若 f 是凸函数, 则 $I^*\neq\emptyset$ 且当 $f^*\in C(I^*)$ 时,

$$(f^*)^*(x)=\sup_{t\in I^*}(xt-f^*(t))=f(x)$$

对于任意 $x\in I$ 成立. 于是凸函数的勒让德变换是对合变换 (它的平方是恒等变换).

c) 成立不等式

$$xt\le f(x)+f^*(t),\quad 当x\in I,\, t\in I^*时.$$

d) 当 f 是凸的可微函数时, $f^*(t)=tx_t-f(x_t)$, 其中 x_t 由方程 $t=f'(t)$ 确定; 由此得到勒让德变换 f^* 及其自变量 t 的几何解释, 它表明勒让德变换是一个在函数 f 图像的切线集合上定义的函数.

e) 当 $\alpha > 1$ 且 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}$ 的勒让德变换是函数 $f^*(t) = \frac{1}{\beta}t^{\beta}$, 其中 $t \geq 0$ 且 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$; 由此, 注意到 c) 款, 得到已经知道的杨格不等式

$$xt \leq \frac{1}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{1}{\beta}t^{\beta}.$$

f) 函数 $f(x) = e^x$ 的勒让德变换是函数 $f^*(t) = t\ln\frac{t}{e}$, $t > 0$, 并且成立不等式

$$xt \leq e^x + t\ln\frac{t}{e}, \quad \text{当} x \in \mathbb{R},\, t > 0 \text{时}.$$

作业 10. 证明: 如果函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则有

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

作业 11. 利用洛必达法则求极限:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

习题 1. 求 a, b 使得, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$.

习题 2. 请分析级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 的收敛性.

习题 3. f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数, 满足 $g(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 对任意 $x_0 \in [a,b]$ 存在. 请证明:

(a) 对任何 $x_0 \in [a,b]$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $[a,b] \cap U_\delta(x_0)$ 上有界;

(b) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

(c) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(d) $[a,b]$ 上满足 $f(x) \neq g(x)$ 的点最多只有可数多个.

当堂小测验 1

测验 1. $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f(x)| \leq M_0, \qquad |f''(x)| \leq M_2.$$

求证: $f'(x) \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

测验 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a) = f'(b)$. 求证: 存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$.

解答作业 1. 用麦克劳林公式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$. 另一方面 $\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = (1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4+o(x^5)) = 1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+o(x^5)$. 因此 $a-b=-1/2$, $b^2-ab=1/24$, 所以 $a=-5/12$, $b=1/12$.

解答作业 2. 首先显然 $C \geq 0$. 接着分情况讨论. 当 $0 \leq C < 1$ 时, 对任意 n $f(x) = f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$. 所以 $|f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!C^{n+1}x^{n+1} = (Cx)^{n+1}$. 而当 $x \in [-1,1]$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx)^{n+1} = 0$, 所以由 n 的任意性 $f(x) \equiv 0$.

对于 $C \geq 1$, 首先有 $f(x) \equiv 0$ 对任意 $x \in \left[-\frac{1}{2C}, \frac{1}{2C}\right]$. 接着对任意 $x \in \left[\frac{n-2}{2C}, \frac{n}{2C}\right]$ 有 $f(x) \equiv 0$, 其中 $-\lceil 2C \rceil + 2 \leq n \leq \lceil 2C \rceil$. 证毕.

解答作业 3. 展开到 $n+2$ 项, 我们有 $r_n(x_0;x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}$. 与题中余项相减, 我们得到

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}.$$

于是, 有

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)(n+2)}(x-x_0).$$

上式两边取 $x \to x_0$, 证毕.

解答作业 4. (a) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}$.

(b) $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)$, $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^5)$. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{12}$.

解答作业 5. 略.

解答作业 6. 对 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 对任意 α, 令 $y = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. 我们需要证明 $f(y)$ 位于 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 下方. 我们知道 $[x_1, 0.5(x_1+x_2)]$ 与 $[0.5(x_1+x_2), x_2]$ 至少有一个包含 y 而且这两个区间的端点都满足条件. 依此类推, 我们可以找到一个闭区间套, 使得区间套的端点都满足条件, 而且 y 属于所有闭区间. 根据 f 的连续性, 证毕.

解答作业 7. a) 反证法, 假设不是常值函数, 则必存在 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 不妨设 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么对于任意 $x > x_2$, 我们有 $\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, 则 $f(x) > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 无上界. 当 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 取 $x < x_1$ 即可. b) 同上.

c) 使用凸性, $g(x_2) \geq g(x_1)$ 当 $x_2 \geq x_1$ 时, 这里 $g(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 所以我们有 $f(x)/x$ 单调, 于是有极限或趋于无穷.

解答作业 8. 由上题 c) 小问, 容易知道 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都是单调函数, 且满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'_-(x) = f'_+(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'_+(x) = f'_-(x_0)$, 对任意 $x_0 \in (a,b)$.

解答作业 9. a) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $I = (0,1)$, 则 I^* 是空集. $f(x) = x$, $I = (-\infty,\infty)$, $I^* = \{1\}$. 假设 $t_1, t_2 \in I^*$, 则对任意 $\alpha \in [0,1]$ 有

$$f^*(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = \sup_{x\in I}((\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)x - f(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in I}(\alpha(t_1x-f(x))+(1-\alpha)(t_2x-f(x))) \le \alpha\sup_{x\in I}(t_1x-f(x))+(1-\alpha)\sup_{x\in I}(t_2x-f(x))\\
&= \alpha f^*(t_1)+(1-\alpha)f^*(t_2).
\end{aligned}
$$

也即, $\alpha t_1+(1-\alpha)t_2\in I^*$, 由 α 的任意性, I^* 是区间, $f^*(t)$ 是 I^* 上凸函数.

b) 先证明若 f 是凸函数, 则 $I^*\neq\emptyset$. 如果存在 $x_1<x_2\in I$, 且 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 中有下界, 且 $f(x)\ge\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 对任意 $x\in I\setminus[x_1,x_2]$, 则证毕. 否则, 任取 $x_0\in[x_1,x_2]$, 如果 $[x_1,x_0]$ 和 $[x_0,x_2]$ 都不符合要求, 则 f 非凸. 证毕.

接着证明 c), 显然成立, 因此有 $f(x)\ge(f^*)^*(x)$. 下面考虑 $f(x)\le(f^*)^*(x)$. 我们令

$$t_x:=\lim_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

则根据凸性, 我们有

$$\frac{f(y_1)-f(x)}{y_1-x}\le\frac{f(y_2)-f(x)}{y_2-x},\qquad \forall x\in(y_1,y_2)\subset I$$

成立, 于是根据 t_x 定义, 我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le t_x,\qquad y<x,\, y\in I. \tag{1}$$

同理,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ge t_x,\qquad y>x,\, y\in I. \tag{2}$$

合并(1)及(2), 我们得 $(y-x)t_x\le f(y)-f(x)$ 对任意 $y\in I$ 成立, 也即

$$t_xx-f(x)\ge t_xy-f(y),\qquad y\in I.$$

所以 $f^*(t_x)=t_xx-f(x)$. 因此 $(f^*)^*(x)=\sup(xt-f^*(t))\ge xt_x-f^*(t_x)=f(x)$. 证毕.

最后, d)-f) 都是推论.

解答作业 10.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=f''(x)$$

解答作业 11. (a) 令 $y=\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$, 我们有

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}x=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}y=1$.

(b)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

(c) 令 $y = x^{\frac{1}{1-x}}$, 我们有

$$\lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \frac{1}{e}$.

解答测验 1.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2}h^2 \quad (0<\theta_1<1),$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x+\theta_2 h)}{2}h^2 \quad (0<\theta_2<1).$$

两式相减得到: $2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) + \frac{f''(x+\theta_2 h)}{2}h^2 - \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2}h^2$. 于是 $|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} \le \sqrt{2M_0M_2}$

解答测验 2. 不妨假设 $f'(a) = f'(b) = 0$, 否则令 $g(x) = f(x) - f'(a)x$ 即可. 结论 $f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$ 可以化为: $f'(c) - \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = 0$, 注意到 $\exists c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) - \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = 0$ 等价于 $[f(x)-f(a)]' - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 (a,b) 内有零点. 等价于 $\frac{[f(x)-f(a)]'}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}$ 内有零点. 等价于 $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$ 在 (a,b) 内有零点. 于是我们构造辅助函数

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 进一步, 对 $\forall x\in(a,b]$, 我们有

$$g'(x) = -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a} = -\frac{g(x)}{x-a} + \frac{f'(x)}{x-a}. \tag{3}$$

剩下只需要证明 $g'(c) = 0$. 分情况. (1) $f(b) = f(a)$, 则 $g(b) = 0$, 由罗尔定理, 证毕. (2) $f(b) \ne f(a)$, 不妨设 $f(b) < f(a)$. 因此 $g(b) < 0$. 则由(3), $g'(b) > 0$. 根据 g 的连续性, $\exists x_1 \in (a,b)$ 使得 $g(x_1) < g(b)$, 于是 $\exists x_0 \in (a, x_1)$, 使得 $g(x_0) = g(b)$. 现在对 $[x_0, b]$ 使用罗尔定理, 即存在 $c \in (x_0, b)$ 使得 $g'(c) = 0$. 对于 $f(b) > f(a)$ 情况, 同理可证.