中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 10

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 12 月 6 日，8:00-9:40

作业 1. 计算 $f'(x)$, 如果

a) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{如果} x \neq 0; \\ 0, & \text{如果} x = 0, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{如果} x \neq 0; \\ 0, & \text{如果} x = 0, \end{cases}$

c) 验证问题 a) 中的函数在 $\mathbb{R}$ 上任意次可微, 且 $f^{(n)}(0) = 0$.

d) 验证问题 b) 中的函数的导数在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 但不是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

e) 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right), & \text{当} -1 < x < 1, \\ 0, & \text{当} |x| \geq 1, \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上任意次可微.

作业 2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. 证明当 $x \neq 0$ 时

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

作业 3. 设 f 是在 $\mathbb{R}$ 上可微的函数. 证明

a) 若 f 是偶函数, 则 f' 是奇函数.

b) 若 f 是奇函数, 则 f' 是偶函数.

作业 4. 举例说明, 如下定理中 f^{-1} 在点 y_0 连续的条件不是多余的.

定理 (关于反函数的导数): 设函数 $f: X \to Y$ 和 $f^{-1}: Y \to X$ 互为反函数, 且分别在点 $x_0 \in X$ 和 $f(x_0) = y_0 \in Y$ 处连续. 如果函数 f 在点 x_0 处可微且 $f'(x_0) \neq 0$, 那么, 函数 f^{-1} 在点 y_0 也可微且 $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.

作业 5. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = a\cos^3(t)$; $y = a\sin^3(t)$ 给出, 求 y''_{xx}.

作业 6. 函数 $f(x)$ 在全数轴上可微且 $f'(x)$ 可以不连续.

a) 证明: 函数 $f'(x)$ 只可能有第二类间断点.

b) 指出下述对于 $f'(x)$ 的连续性的"证明"中的错误.

设 x_0 是 $\mathbb{R}$ 中任意一点且 $f'(x_0)$ 是函数 f 在点 x_0 处的导数. 根据导数的定义和拉格朗日定理

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(\xi) = \lim_{\xi \to x_0} f'(\xi),$$

其中 ξ 是 x_0 和 x 之间的点, 从而当 $x \to x_0$ 时也趋于 x_0.

作业 7. a) 将拉格朗日定理用于函数 $\frac{1}{x^\alpha}$, 其中 $\alpha > 0$, 证明对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha > 0$ 成立不等式

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

b) 用问题 a) 的结果证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ 当 $\sigma > 1$ 时收敛.

作业 8. 证明: 如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

作业 9. 证明: 如果函数 $f(x)$ 在有穷区间 (a, b) 上可微但无界, 则其导数 $f'(x)$ 在 (a, b) 上也无界.

作业 10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可微, 其中 $0 < a < b$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{1}{b-a}\left|\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{pmatrix}\right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解答作业 1. a) 对 $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$; $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{\exp(y^2)} = 0$.

b) 对 $\forall x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$; $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$.

c) 对 $x \neq 0$, 我们证明 $f^{(n)}(x)$ 存在且 $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, 这里 p_n 是维数不超过 $3n$ 的多项式. $n=1$ 时显然成立, 假设 $n = k(k \geq 1)$ 时成立, 则, $f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(f'(x)) = f^{(k)}\left(\frac{2}{x^3}f(x)\right)$, 根据莱布尼兹公式及归纳假设, 证毕. $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} = \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y p_{n-1}(y)}{\exp(y^2)} = 0$.

d) 显然 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

e) 同理.

解答作业 2. 数学归纳法. 显然 $n = 1$ 时成立, 下面假设 $1, ..., n$ 都成立, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
= \;& n\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right)' \\
= \;& n(-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
= \;& (-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

解答作业 3. a) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 我们有 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-x-h)-f(-x)}{h} = -\lim\limits_{-h\to 0} \frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h} = -f'(-x)$, 证毕. b) 同理.

解答作业 4. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{如果} 0 \leq x \leq 1; \\ x-1, & \text{如果} x > 2, \end{cases}$ 则 $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{如果} 0 \leq x \leq 1; \\ x+1, & \text{如果} x > 1. \end{cases}$

我们有 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可微, 但 $f^{-1}(x)$ 在 $y_0 = f(x_0) = 1$ 处不可微.

解答作业 5. $\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2(t)\cos(t)$, $\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2(t)\sin(t)$, 所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt} = -\tan(t)$. 因此, $y''_{xx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)/\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2(t)}/(3a\cos^2(t)\sin(t)) = 1/(3a\cos^4(t)\sin(t))$.

解答作业 6. 假设不存在第二类间断点, 所以 $\lim \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 和 $\lim \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 都存在. 不妨假设前者是 g^+, 后者是 g^-. 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得, $|f'(x) - g^+| < \epsilon/4$ 对任意 $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ 成立. 另一方面, 根据导数定义, 存在 $delta' > 0$ 使得, 对任意 $0 < |h| \leq delta'$, 有 $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)| < \epsilon/4$, 另一方面, 由连续性, 存在 $\delta'' > 0$, 对任意, $x_0 < x \leq x_0 + \min\{\delta'', \delta\}$, 使得 $|f(x+h) - f(x_0+h)| \leq \epsilon h$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon h$ 同时满足, 于是我们有 $|f'(x_0) - g^+| < \epsilon$, 成立, 同理可证 $|f'(x_0) - g^-| < \epsilon$, 也即 $g^+ = g^- = f'(x_0)$, 因此 $f'(x)$ 在 x_0 连续. 证毕.

b) 最后一个等式不对, 只能证明对任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $\delta > 0$, 在 x_0 的 δ-邻域内存在 ξ 使得 $|f'(x_0) - f'(\xi)| < \epsilon$. 这和极限的定义不一致.

解答作业 7. a) 考察函数 $f(x) = -\frac{1}{\alpha x^\alpha}$, 我们有 $f'(x) = \frac{1}{x^{1+\alpha}}$. 根据拉格朗日定理, 我们有

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = f(n) - f(n-1) = f'(\xi) = \frac{1}{\xi^{1+\alpha}} > \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

这里 $\xi \in (n-1, n)$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1}{1^{\sigma-1}} - \frac{1}{2^{\sigma-1}} + \frac{1}{2^{\sigma-1}} - \frac{1}{3^{\sigma-1}} + ...\right) = 1 + \frac{1}{\sigma-1} = \frac{\sigma}{\sigma-1}$.

解答作业 8. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 所以对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N_1>0$, 使得 $|f'(x)|<\epsilon/2$. 有拉格朗日定理, 对任意 $x>N_1$, 存在 $\xi\in(N_1,x)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(N_1)}{x-N_1}$, 因此我们有 $\left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x-N_1}\right|<\epsilon/2$. 另一方面存在 $N_2>0$, 使得当 $x>N_2$ 时, $\frac{f(N_1)}{x}<\epsilon/2$. 所以对于任何 $x>\max\{N_1,N_2\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x}+\frac{f(N_1)}{x}\right| \le \left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x}\right|+\left|\frac{f(N_1)}{x}\right| \\ &< \left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x-N_1}\right|+\left|\frac{f(N_1)}{x}\right| \le \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.\end{aligned}$$

证毕.

解答作业 9. 任取 $x_0\in(a,b)$, 对任意 $C>0$, 因为 $f(x)$ 无界, 因此存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $|f(x_1)|>(b-a)C+|f(x_0)|$. 根据拉格朗日定理, 存在 $\xi\in(x_0,x_1)\cup(x_1,x_0)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$, 因此 $|f'(\xi)|=\left|\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\right|\ge\left|\frac{f(x_0)-f(x_1)}{b-a}\right|\ge\left|\frac{f(x_1)}{b-a}\right|-\left|\frac{f(x_0)}{b-a}\right|>C$. 证毕.

解答作业 10. 取 $h(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$. 对 $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$ 使用拉格朗日定理, 证毕.