中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 1

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 9 月 20 日，8:00-9:40

习题 1. 试证：

a) $(X \times Y = A \times B) \Leftrightarrow (X = A) \wedge (Y = B)$.

b) $(X \times Y \subset A \times B) \Leftrightarrow (X \subset A) \wedge (Y \subset B)$.

习题 2. a) 设 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$ 都是双射. 试证: 映射 $g \circ f : X \to Z$ 是双射, 并且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) 试证: 对任何映射 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 及任何集合 $C \subset Z$, 等式 $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ 成立.

c) 设 $f : X \to Y$ 是双射. 试证: 由 $x \mapsto (x, f(x))$ 定义的映射 $F : X \to X \times Y$ 是双射.

习题 3. 请验证: $\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \mathbb{Q}$.

习题 4. 设 X 为任意给定的有限集合, $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数, $\mathcal{P}(X)$ 表示集合 X 所有子集组成的集合. 请验证: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

作业 1. 请证明 Cantor 定理: $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

作业 2. 试证映射 $f : X \to Y$ 是

a) 满射, 当且仅当对任何 $B' \subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B')) = B'$.

b) 双射, 当且仅当对任何 $A \subset X$ 及任何 $B' \subset Y$ 有

$$(f^{-1}(f(A)) = A) \wedge (f(f^{-1}(B')) = B').$$

作业 3. 检验关于映射 $f : X \to Y$ 的诸命题的等价性:

a) f 是内射;

b) 对于任何集合 $A \subset X$, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$;

c) 对 X 的任意两个子集 A, B, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

d) $f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

e) 当 $X \supset A \supset B$ 时, 有 $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

解答习题 1. 先证 b), $\Leftarrow$ 显然成立; 下证 $\Rightarrow$, $\forall x\in X$, $y\in Y$, 我们有 $(x,y)\in X\times Y$, 进而 $(x,y)\in A\times B$, 因此, $(x\in A)\wedge(y\in B)$, 证毕. 同理, $(X\times Y\supset A\times B)\Leftrightarrow(X\supset A)\wedge(Y\supset B)$, 故 a) 亦得证.

解答习题 2. 先考虑 a), 先证内射, 再证满射, 因此是双射; $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=I_Z$, 并且 $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=I_X$, 证毕.

b) 首先, $(g\circ f)^{-1}(C)=\{x\in X\mid (g\circ f)(x)\in C\}$; 其次, $f^{-1}(g^{-1}(C))=\{x\in X\mid f(x)\in g^{-1}(C)\}$; 而 $f(x)\in g^{-1}(C)$ 等价于 $g(f(x))\in C$, 证毕.

c) 先证内射, 再证满射.

解答习题 3. 只需证 $\mathbb{Q}$ 可数. 我们知道所有有理数可以排成如下序列:

$$0,1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2,-2,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},3,-3,\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},4,-4,\ldots$$

证毕.

解答习题 4. $\mathcal{P}(X)$ 中任何元素对 X 中每个元素都有“取”或” 不取” 两种选择. 证毕.

解答作业 1. $\operatorname{card}X\le\operatorname{card}\mathcal{P}(X)$ 显然成立. 反证法, 假设 $\operatorname{card}\mathcal{P}(X)\le\operatorname{card}X$. 则存在 X 的子集 $\bar{X}\subset X$ 使得 $\mathcal{P}(X)\sim\bar{X}$. 我们记双射 $F:\bar{X}\to\mathcal{P}(X)$. 我们挑选 $\bar{X}$ 的子集 $\tilde{X}\subset\bar{X}$ 如下: 如果 $x\in F(x)$ 则 $x\notin\tilde{X}$, 如果如果 $x\notin F(x)$ 则 $x\in\tilde{X}$. 根据取法, $\forall x\in\bar{X}$ 有 $\tilde{X}\neq F(x)$, 因此 $\tilde{X}\notin\mathcal{P}(X)$, 矛盾. 假设不成立, 证毕.

解答作业 2. 首先证明 $\Leftarrow$. 用反证法, 假设 f 不是满射. 如果对任意 $y\in Y$, 都存在 $x\in f^{-1}(Y)$ 使得 $f(x)=y$, 则 f 是满射, 因此必须存在 $y\in Y$ 使得不存在 $x\in f^{-1}(Y)$ 使得 $f(x)=y$, 也即 $y\notin f(f^{-1}(Y))$, 因此 $f(f^{-1}(Y))=Y$ 不成立. 与题设矛盾, 证毕.

下面证明 $\Rightarrow$. 第一步证明: $\forall B\subset Y$, $f(f^{-1}(B))\subset B$. 对任意给定的 $y\in f(f^{-1}(B))$, 存在 $x\in f^{-1}(B)$ 使得 $f(x)=y$. 另一方面 $x\in f^{-1}(B)$ 蕴含着 $f(x)\subset B$, 因此 $y\subset B$, 证毕. 第二步证明: $\forall B\subset Y$, $B\subset f(f^{-1}(B))$. 因为 f 是满射, 对任意 $y\in B\subset Y$, 存在 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$, 因此 $x\in f^{-1}(B)$, 进而 $y\in f(f^{-1}(B))$ 证毕.

综上所述, a) 证毕. 同理, 我们可以证明 “f 是内射, 当且仅当对于任何 $A\subset X$ 有 $f^{-1}(f(A))=A$”. 综合这两个结果, b) 证毕.

解答作业 3. 首先, a)$\Leftrightarrow$b) 已经证毕.

其次, 我们考虑 a)$\Leftrightarrow$c). 先证 $\Rightarrow$. 首先 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ 成立. 根据内射, $y\in f(A)\cap f(B)$ 蕴含 $y\in f(A\cap B)$, 证毕. 下证 $\Leftarrow$, 反证法, 如果不是内射, 则存在 $x_1\in X$, $x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$, 令 $A=\{x_1\}$, $B=\{x_2\}$, 则得出 $\emptyset=\{f(x_1)\}$, 矛盾, 遂证毕.

类似可证 a)$\Leftrightarrow$d).

最后证明 a)$\Leftrightarrow$e). 先证 $\Rightarrow$. 首先 $f(A\setminus B)\supset f(A)\setminus f(B)$ 成立. 根据内射, 对任意 $y\in f(A\setminus B)$, 则有 $y\in f(A)$ 并且 $y\notin f(B)$, 因此 $y\in f(A)\setminus f(B)$, 证毕. 下证 $\Leftarrow$, 类似用反证法.